Beiträge

zur

Theorie der Lamé'schen Funktionen.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 16. Oktober 1903

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Emil Hilb

aus Stuttgart.

München 1903.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552320_0049

Herr Professor Lindemann hat im Anschluss an die Arbeiten von Neumann über die Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Kugelfunktionen die Entwicklung dieses Ausdruckes nach Laméschen Funktionen untersucht[1]) und, davon ausgehend, die Entwicklung allgemeiner Funktionen komplexen Argumentes nach Laméschen Funktionen erhalten. Bei diesen Entwicklungen traten jedoch nur Lamésche Funktionen der Klasse K auf.

Durch Herrn Professor Lindemann wurde ich nun veranlasst, diese Untersuchungen wieder aufzunehmen unter Heranziehung der Laméschen Funktionen der anderen Klassen. Dabei waren zunächst die entsprechenden Formeln abzuleiten für diese Fälle, wobei sich jedoch keine prinzipiellen Modifikationen ergeben. Dagegen wird auf Grund der Untersuchungen des § 2 gezeigt, dass die von Herrn Professor Lindemann aufgestellten Konvergenzbedingungen ihrer Ableitung nach im allgemeinen nur notwendige Bedingungen liefern können. In der Tat zeigt auch eine nähere Untersuchung eines speziellen Falles, nämlich der Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Zugeordneten der Kugelfunktionen, dass diese Bedingungen nicht hinreichend sind. Ja sogar, es wird im allgemeinen überhaupt keine Kurve sich angeben lassen, welche die Ebene so in zwei Teile teilt, dass für alle z in dem einen, für alle z_1 in dem anderen Teile die Entwicklung eine konvergente ist. Es zeigt sich also, dass hier ganz andere Verhältnisse herrschen, als bei den von Neumann untersuchten Entwicklungen.

---

[1]) Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variabeln nach Laméschen Funktionen und nach Zugeordneten der Kugelfunktionen. Mathem. Annalen, Band XIX.

Die Untersuchung wird in unserem Falle besonders dadurch erschwert, daß die im § 2 untersuchten Grössen v_s^n, die algebraischen Gleichungen genügen, auf das Unendlichgross- bezüglich Unendlichkleinwerden der einzelnen Glieder von wesentlichem Einfluss sind, ohne dass man sie genau bestimmen kann. Nichtsdestoweniger gelingt es, Bedingungen zu finden, welche hinreichend sind, allerdings sind nun diese nicht gleichzeitig notwendig, die erhaltenen Konvergenzgebiete sind nicht die grösstmöglichen. Jedoch dürfte die Aufstellung der letzteren, wenn überhaupt möglich, mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden sein. Die durch unsere Ableitung sich ergebende Einschränkung tritt bei den Entwicklungen allgemeiner Funktionen dadurch zutage, dass die Gültigkeit der Entwicklung nur für einen kleineren Bereich bewiesen ist, als derjenige ist, innerhalb dessen die Funktion regulär ist, eine Einschränkung, welche, allerdings in geringerem Masse, auch dann eintreten würde, wenn es gelungen wäre, Bedingungen abzuleiten, die gleichzeitig hinreichend und notwendig sind.

Es wurden auch durchgehend komplexe Parameter herangezogen. Zwar wurde dieses schon zum grossen Teile von Herrn Cohn[1]) untersucht, doch dürfte die hier gegebene Ableitung eine wesentlich andere und vielleicht auch einfachere sein.

Zu dieser Arbeit wurde ich von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Lindemann, angeregt, der mich auch während der Anfertigung in reichem Masse förderte, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

---

[1]) Über Lamésche Funktionen mit komplexen Parametern. Königsberg 1888.

§ 1.

Die Laméschen Funktionen.

Die Laméschen Funktionen $E_s^n(z)$ sind bekanntlich definiert als ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades von z, $\sqrt{z^2-b^2}$, $\sqrt{z^2-c^2}$, welche der linearen, homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$1)\quad (z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2y}{dz^2}+z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dy}{dz}+[(b^2+c^2)\nu_s^n-n(n+1)z^2]y=0$$

genügen. Dabei sind die ν_s^n Wurzeln einer gewissen algebraischen Gleichung, welche im nächsten Paragraph näher untersucht werden wird. Setzt man nun[1])

$$2)\quad \varepsilon=\int_b^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-b^2)(c^2-z^2)}};\quad \xi=\int_0^{z'}\frac{dz'}{\sqrt{b^2-z'^2}\,\sqrt{c^2-z'^2}},$$

wobei b und c reelle Grössen sein sollen und zwar $b\leqq c$, so genügt das Produkt $E_s^n(z)\cdot E_s^n(z')$ der Differentialgleichung

$$3)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+n(n+1)(z^2-z'^2)f=0.$$

Es gibt dann 4 Klassen solcher Laméscher Funktionen und zwar, wenn $\sigma=\frac{1}{2}n$ bei geradem n, wenn $\sigma=\frac{1}{2}(n-1)$ bei ungeradem n ist

$\sigma+1$ Funktionen $K(z)=a_0z^n+a_1z^{n-2}+\ldots$

$n-\sigma$ „ $L(z)=\sqrt{z^2-b^2}\,\{a_0z^{n-1}+a_1z^{n-3}+\ldots\}$

$n-\sigma$ „ $M(z)=\sqrt{z^2-c^2}\,\{a_0z^{n-1}+a_1z^{n-3}+\ldots\}$

σ „ $N(z)=\sqrt{z^2-b^2}\,\sqrt{z^2-c^2}\,\{a_0z^{n-2}+a_1z^{n-4}+\ldots\}$.

---

[1]) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. 1., S. 353 ff.

Es erweist sich jedoch als zweckmässig, statt z eine neue unabhängige Variable

4) $$\zeta = \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$$

einzuführen. Dann gehen die obigen Formeln über in die folgenden

5a) n sei gerade

$$K(z) = \frac{\zeta^n}{2}\left[a_0 + a_1\zeta^{-2} + a_2\zeta^{-4} + \ldots + \frac{a_\sigma}{2}\zeta^{-n}\right] + \frac{\xi^{-n}}{2}\left[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots + \frac{a_\sigma}{2}\zeta^n\right]$$

$$L(z) = \frac{z}{2}\zeta^{n-1}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots a_{\sigma-1}\zeta^{-n+2}] + \frac{z}{2}\zeta^{-n+1}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots a_{\sigma-1}\zeta^{n-2}]$$

$$M(z) = \frac{zi}{2}\zeta^{n-1}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots + a_{\sigma-1}\zeta^{-n+2}] - \frac{zi}{2}\zeta^{-n+1}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots + a_{\sigma-1}\zeta^{n-2}]$$

$$N(z) = \zeta^n\frac{i}{2}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots a_{\sigma-1}\zeta^{-n+2}] - \zeta^{-n}\frac{i}{2}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots a_{\sigma-1}\zeta^{n-2}].$$

5b) n sei ungerade

$$K(z) = \frac{z}{2}\zeta^{n-1}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots + a_{\sigma-1}\zeta^{-n+3} + \tfrac{1}{2}a_\sigma\zeta^{-n+1}] + \frac{z}{2}\zeta^{-n+1}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots + a_{\sigma-1}\zeta^{n-3} + \tfrac{1}{2}a_\sigma\zeta^{n-1}]$$

$$L(z) = \frac{\zeta^n}{2}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots a_\sigma\zeta^{-n+1}] + \frac{\zeta^{-n}}{2}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots a_\sigma\zeta^{n-1}]$$

$$M(z) = \frac{i}{2}\zeta^n[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots + a_\sigma\zeta^{-n+1}] - \frac{i}{2}\zeta^{-n}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots + a_\sigma\zeta^{n-1}]$$

$$N(z) = \frac{i}{2}z\zeta^{n-1}[a_0 + a_1\zeta^{-2} + \ldots a_{\sigma-1}\zeta^{-n+3}] - \frac{i}{2}z\zeta^{-n+1}[a_0 + a_1\zeta^2 + \ldots + a_{\sigma-1}\zeta^{n-3}].$$

Herr Professor Lindemann hat nun in seiner in der Einleitung erwähnten Arbeit: „Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variabeln nach Laméschen Funktionen und nach Zugeordneten der Kugelfunktionen“ (Mathematische Annalen Band 19) die durch ζ vermittelte Abbildung der z Ebene genau untersucht. Da dieses auch hier die Grundlage für alles weitere bildet, so sollen die dort gegebenen Resultate hier zusammengestellt werden. Es sei nun

$$z = x + iy.$$

Dann entsprechen den Kreisen in der ζ Ebene mit dem Koordinatenanfangspunkte als Mittelpunkt die Kurven:[1])

$$6) \quad \left(\frac{x^2 - y^2 - \frac{1}{2}(c^2+b^2)}{\varrho^2 + \varrho^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{2xy}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{c^2 - b^2}{4}\right)^2$$

wenn ϱ der Radius des Kreises in der ζ Ebene ist.

Dem Einheitskreise entspricht die Verbindungslinie von $+b$, $+c$ und $-b$, $-c$. Wenn ϱ abnimmt, so entsprechen jedem Kreise 2 ovalförmige Kurven, die $+b$ und $+c$, bezüglich $-b$ und $-c$ umgeben.

Hat ϱ dann den Wert

$$6a) \quad \varrho_0 = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$$

erreicht, so stellt die Gleichung 6) eine Kurve dar, die aus nur einem Zuge besteht und den Koordinatenanfangspunkt als

[1]) l. c. S. 331.

Doppelpunkt hat. Nimmt ϱ weiter ab, so erhält man wiederum Kurven, die nur aus einem Zuge bestehen und die die beiden Achsen in je 2 getrennten Punkten schneiden. Das ganze System verhält sich also wie ein System confokaler Cassinischer Kurven. (Bezüglich weiterer Ausführungen ist auf die zitierte Arbeit zu verweisen.)

Wir setzen nun voraus, dass $\sqrt{c^2-b^2}$ positiv ist. Man erhält dann für ζ eine vierblättrige Riemannsche Fläche über der z Ebene mit den Verzweigungspunkten $\pm b$, $\pm c$. Ebenso hat man für z als Funktion von ζ eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den 4 Verzweigungspunkten

$$\pm i\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}; \text{ und } \pm i\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Ferner sei z_0 ein reeller Wert, $b<z_0<c$, dann hat man:

im ersten Blatte $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2} = +\sqrt{z_0^2-b^2}-\sqrt{z_0^2-c^2}$

„ zweiten „ $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2} = -\sqrt{z_0^2-b^2}+\sqrt{z_0^2-c^2}$

„ dritten „ $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2} = -\sqrt{z_0^2-b^2}-\sqrt{z_0^2-c^2}$

„ vierten „ $\zeta_0\sqrt{c^2-b^2} = +\sqrt{z_0^2-b^2}+\sqrt{z_0^2-c^2}$,

so dass zusammenhängen

die Blätter 1 und 3 in $\pm b$

„ „ 1 „ 4 „ $\pm c$

„ „ 2 „ 3 „ $\pm c$

„ „ 2 „ 4 „ $\pm b$.

Wir betrachten aber im folgenden nur den Fall

7a) $$|\zeta|<1,$$

d. h. wir setzen fest, dass in der z Ebene die Verbindungslinien von $+b$ und $+c$, bezüglich $-b$ und $-c$ nicht überschritten werden dürfen. Bezeichnet man nun die Quadranten in der z Ebene mit römischen Ziffern, so dass $+x$, $+y$ = I; $-x$, $+y$ = II; $-x$, $-y$ = III; $+x$, $-y$ = IV; mit einem unten angefügten Index das Blatt der Riemannschen Fläche und verfährt man ebenso in der ζ Ebene, wobei jedoch nur

das Innere des Einheitskreises in Betracht kommt, so entsprechen sich folgende Stücke der über z bezüglich ζ ausgebreiteten Riemannschen Flächen

a) $I_1 - IV_1$; $II_1 - III_1$; $III_4 - II_1$; $IV_4 - I_1$

b) $I_2 - II_2$; $II_2 - I_2$; $III_3 - IV_2$; $IV_3 - III_2$.

Ferner hat man

$$\lim_{z=\infty} z\,\zeta = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}$$

Nach dem Vorgange von Herrn Professor Lindemann setzen wir

7b) $$\lim_{z=\infty} z\,\zeta = +\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2}$$

Durch die Gleichungen 7a) und 7b) sind z und ζ als eindeutige Funktionen voneinander festgelegt und zwar entsprechen sich die Quadranten a). Allein L, M, N sind, wie aus ihren Entwicklungen 5) hervorgeht, eindeutige Funktionen von z und ζ; jedoch zweideutige Funktionen von z allein, wobei sich die beiden Zweige nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Wir betrachten deshalb über der z Ebene eine neue Riemannsche Fläche, welche 2 Blätter hat, die in $\pm b$ bezüglich $+c$, b, 0, $-b$, $-c$, bezüglich $+b$, $+c$ und $-b$, $-c$ zusammenhängen. $L(z)$, $M(z)$, $N(z)$ sind in diesen Flächen eindeutige Funktionen des Ortes.

In der ζ Ebene besteht die Fläche aus zwei getrennten, übereinanderliegenden Kreisen mit dem Koordinatenanfangspunkte als Mittelpunkt und dem Radius 1. In der Tat ist in den 3 Fällen L, M, N

$$\lim_{z=\infty} E_s^n(z)\, z^{-n} = \pm a_0.$$

Sei n gerade, so hat man z. B. für $L(z)$

$$\lim_{z=\infty} z^{-n} L(z) = z^{-n+1}\,\zeta^{-n+1}\,\frac{a_0}{2} = (\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{c^2-b^2})^{-n+1}\,\frac{a_0}{2} = \pm a_0.$$

Also hat man

$$a_0 = \pm \frac{2\,a_0}{(\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - b^2})^{n-1}}.$$

§ 2.

Untersuchung der v_s^n.

Wir müssen die in der Gleichung 1) auftretenden Grössen v_s^n näher betrachten. Es sei

8) $$p = b^2 + c^2; \quad q = b^2 c^2.$$

Im Falle K setzen wir $v_s^n = \mathfrak{K}$, im Falle L, M, N $v_s^n = \mathfrak{L}$, bezw. $\mathfrak{M}$ bezw. $\mathfrak{N}$.

Dann hat man [1])

9) $$2 \cdot (2n-1)\, a_1 = p\,[\mathfrak{K} - n^2]\, a_0$$

. . . . . .

$$2m\,(2n+1-2m)\,a_m = p\,[\mathfrak{K} - (n+2-2m)^2]\; a_{m-1} + q\,(n+4-2m)\,(n+3-2m)\; a_{m-2}$$

. . . . . .

$$a_{\sigma+1} = 0 = p\,[\mathfrak{K} - (n-2\sigma)^2]\, a_\sigma + q\,(n+2-2\sigma)\,(n+1-2\sigma)\, a_{\sigma-1}.$$

Durch Elimination der a_m erhält man für $\mathfrak{K}$ eine Gleichung $\sigma+1^{\text{ten}}$ Grades. Ferner hat man

9a) $$2m(2n-2m+1)a_m = [p(\mathfrak{L} - (n+1-2m)^2) - c^2(2n+3-4m)]\, a_{m-1} + q\,(n+2-2m)\,(n+3-2m)\, a_{m-2},$$

wobei $$a_{n-\sigma} = 0.$$

9b) $$2m(2n-2m+1)a_m = [p(\mathfrak{M} - (n+1-2m)^2) - b^2(2n+3-4m)]\, a_{m-1} + q\,(n+2-2m)\,(n+3-2m)\, a_{m-2}$$

und $$a_{n-\sigma} = 0.$$

9c) $$2m\,(2n+1-2m)\,a_m = [\mathfrak{N} - (n-2m+1)^2]\; p\, a_{m-1} + q\,(n+1-2m)\,(n+2-2m)\, a_{m-2}.$$

$$a_\sigma = 0.$$

Setzt man $b = 0$, so wird $q = 0$ und man sieht sofort, dass

$\mathfrak{K} = n^2, (n-2)^2; \ldots . (n-2m)^2, \ldots . (n-2\sigma)^2;$
$\mathfrak{L} = n^2, (n-2)^2; \ldots . (n-2m)^2; \ldots (-n+2\sigma+2)^2$
$\mathfrak{M} = (n-1)^2; (n-3)^2; (n-2m+1)^2, (-n+2\sigma+1)^2$
$\mathfrak{N} = (n-1)^2; (n-3)^2; (n-2m+1)^2, \quad (n-2\sigma+1)^2.$

[1]) Heine, l. c. S. 363.

9a) hat dabei für $b = 0$ die Form

$$2m(2n - 2m + 1)a_m = c^2(\varrho - (n + 2 - 2m)^2)a_{m-1}.$$

Heine findet dieses Resultat, indem er diese Werte in die Differentialgleichung 1) einsetzt. Diese geht dann in die Gleichung über, der die Zugeordneten der Kugelfunktionen $P_m^n\left(\frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{c^2}\right)$ genügen, woraus dann folgt, dass die v_s^n wirklich den betreffenden algebraischen Gleichungen genügen.

Wir gehen jetzt zu dem Systeme von Gleichungen, welches aus den Entwicklungen nach Potenzen von ζ entspringt, über.

Wir setzen:

$$10) \qquad \varkappa = \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}.$$

Man hat dann, wenn n gerade ist, für K und N, wenn n ungerade, für L und M, das System von Gleichungen.[1])

$$11) \quad \begin{aligned} 1 \cdot (2n-1)a_1 &= (2v-n)\varkappa a_0 \\ 2(2n-3)a_2 &= (2v - 5n + 4)\varkappa a_1 - n \cdot 1 \cdot a_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m+1)(2n-2m-1)a_{m+1} &= [2v - (4m+1)n + 4m^2]\varkappa a_m \\ &\quad - (n+1-m)(2m-1)a_{m-1}. \end{aligned}$$

Für K geht das System bis

$$(b)\ \sigma(n+1)a_\sigma = (2v - n\cdot(n+1) + 4)\varkappa a_{\sigma-1} - (\sigma+2)(n-3)a_{\sigma-2}$$

und man hat zur Bestimmung von v

$$(c)\ (2v - n(n+1))\varkappa a_\sigma - (n+2)(n-1)a_{\sigma-1} = 0.$$

Für N hat man

$$(b')\ (\sigma-1)(n+3)a_{\sigma-1} = [2v - n(n+1) + 16]\varkappa a_{\sigma-2} - (\sigma+3)(n-5)a_{\sigma-3}$$

$$(c')\ (2v - n(n+1) + 4)\varkappa a_{\sigma-1} - (\sigma+2)(n-3)a_{\sigma-2} = 0.$$

Für L und M hat man, wenn n ungerade

$b'')$ bezüglich $b''')$ $\sigma(n+2)a_\sigma = [2v - n(n+1) + 9]\varkappa a_{\sigma-1} - (\sigma+3)(n-4)a_{\sigma-2}$

---

[1]) Heine, l. c. S. 373 ff.

$$c'') \quad [(2v - n(n+1) + 1)\varkappa - n(\sigma+1)]\, a_\sigma - (\sigma+2)(n-2)\, a_{\sigma-1} = 0$$

$$c''') \quad [(2v - n(n+1) + 1)\varkappa + n(\sigma+1)]\, a_\sigma - (\sigma+2)(n-2)\, a_{\sigma-1} = 0.$$

c''') weicht von der von Heine gegebenen Formel ab. In der Tat muss, wie aus 5 b) hervorgeht, $a_{\sigma+1} = -a_\sigma$ gesetzt werden und nicht $a_{\sigma+1} = 0$.

Für die anderen 4 Fälle hat man

11 a)
$$1\cdot(2n-1)\, a_1 = [2v - 3n + 1]\varkappa a_0$$
$$2\,(2n-3)\, a_2 = [2v - 7n + 9]\varkappa a_1 - (n-1)\,3\, a_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(m+1)(2n-2m-1)\, a_{m+1} = [2v - (4m+3)n + (2m+1)^2]\varkappa a_m - (n-m)(2m+1)\, a_{m-1}.$$

Für K geht das System bis a_σ und zwar ist n ungerade.

(β) $\sigma(n+2)\, a_\sigma = [2v - n(n+1) + 4]\varkappa a_{\sigma-1} - (\sigma+2)(n-2)\, a_{\sigma-2}$

(γ) $(2v - n(n+1))\varkappa a_\sigma - n(n+1)\, a_{\sigma-1} = 0.$

Ebenso hat man für N

(β') $(\sigma-1)(n+4)\, a_{\sigma-1} = [2v - n(n+1) + 16]\varkappa a_{\sigma-2} - (\sigma+3)(n-4)\, a_{\sigma-3}$

(γ') $[2v - n(n+1) + 4]\varkappa a_{\sigma-1} - (\sigma+2)(n-2)\, a_{\sigma-2} = 0.$

Für L und M hat man, wenn n gerade ist

$(\beta''$ und $\beta''')$ $(\sigma-1)(n+3)\, a_{\sigma-1} = [2v - n(n+1) + 9]\varkappa a_{\sigma-2} - (\sigma+2)(n-3)\, a_{\sigma-3}$

(γ'') $[(2v - n(n+1) + 1)\varkappa - \sigma(n+1)]\, a_{\sigma-1} = (\sigma+1)(n-1)\, a_{\sigma-2}$

(γ''') $[(2v - n(n+1) + 1)\varkappa + \sigma(n+1)]\, a_{\sigma-1} = (\sigma+1)(n-1)\, a_{\sigma-2}.$

Wir wollen jetzt die v_s bestimmen, wenn $b = c$ wird, d. h. wenn $\varkappa$ in das Unendliche wächst. Die v nähern sich den Werten

$2v = (4m+1)n - 4m^2 = n(n+1) - (n-2m)^2$ bezüglich

$2v = (4m+3)n - (2m+1)^2 = n(n+1) - (n-1-2m)^2.$

Um dieses zu erweisen, beschränken wir uns auf den Fall K, wobei n gerade sein soll. Wir setzen die linke Seite

von $(c) = f(v)$ und lassen v sich in einem Intervalle bewegen, in dem $|2v-(4m_1+1)n+4m_1^2|<1$. Sei nun $\nu < m_1+1$. Dann haben die α_ν für alle v in dem bezeichneten Intervalle dasselbe Vorzeichen, wenn $\varkappa$ gross genug gewählt. Ferner aber, wie klein auch δ sein mag, immer lässt sich ein $\varkappa'$ so angeben, dass für alle $\varkappa > \varkappa'$ die α_μ und $f(v)$ ihr Vorzeichen in dem Intervalle

$$-\delta < 2v-(4m_1+1)n+4m_1^2 < +\delta$$

wechseln, wenn $\mu > m_1+1$. Dabei gehören zu kleinen δ sehr grosse $\varkappa$, aber wie gross auch $\varkappa$ sei, immer lässt sich δ so klein bestimmen, dass die α_μ und $f(v)$ in dem Intervalle nicht alle verschwinden. Damit ist aber die Behauptung erwiesen.

Ist also $\varkappa = \infty$; n gerade, so ist

$2\mathfrak{K} = n(n+1)$; $\quad n(n+1)-2^2; \ldots n(n+1)-n^2$
$2\mathfrak{L} = n(n+1)-1$; $\quad n(n+1)-3^2; \ldots n(n+1)-(n-1)^2$
$2\mathfrak{M} = n(n+1)-1$; $\quad n(n+1)-3^2; \ldots n(n+1)-(n-1)^2$
$2\mathfrak{N} = n(n+1)-2^2$; $\quad n(n+1)-4^2; \ldots n(n+1)-n^2$.

Es sei n ungerade. Dann ist

$2\mathfrak{K} = n(n+1)$; $\quad n(n+1)-2^2; \ldots n(n+1)-(n-1)^2$
$2\mathfrak{L} = n(n+1)-1$; $\quad n(n+1)-3^2; \ldots n(n+1)-n^2$
$2\mathfrak{M} = n(n+1)-1$; $\quad n(n+1)-3^2; \ldots n(n+1)-n^2$
$2\mathfrak{N} = (n(n+1)-2^2)$; $\quad n(n+1)-4^2; \ldots n(n+1)-(n-1)^2$.

Man zeigt nun bekanntlich auf Grund der Sturmschen Prinzipien,[1]) dass die Gleichungen für die v, die wir soeben aufgestellt haben, nur reelle, voneinander verschiedene Wurzeln besitzen, wenn $\varkappa$ eine reelle Grösse ist. Wir wollen aber jetzt dieses Resultat erweitern, indem wir v und n als fest annehmen und $\varkappa$ aus der Gleichung bestimmen. Zunächst sieht man sofort, dass der Grad der Gleichung für $\varkappa$ derselbe ist, wie für v. Es sei v grösser als die grösste Wurzel, die man für $\varkappa = \infty$ in jedem einzelnen Falle erhält, also im Falle K sei $2v > n(n+1)$. Dann sind in den betreffenden Gleichungen für die α_{m+1} die

[1]) Heine, l. c. S. 374.

Koeffizienten von $\varkappa a_m$ immer positiv, wird also $\varkappa = +\infty$, so haben alle a positives Vorzeichen, wenn $a_0 = +1$ gesetzt wird: ist aber $\varkappa = -\infty$, so haben die a abwechselndes Vorzeichen. Wir beschränken uns jetzt im wesentlichen auf den Fall K, wobei noch n gerade sein soll, für die anderen Fälle treten nur unbedeutende Modifikationen ein. Die linke Seite von 11c) bezeichnen wir mit $f(v)$ oder $f(v, \varkappa)$ oder $f(\varkappa)$.

Dann hat man

1. Die a_0, a_1 . . a_σ, $f(\varkappa)$ sind Funktionen von $\varkappa$ vom 0ten, 1ten, . . σ^{ten}, $(\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für $\varkappa = +\infty$ gleiche, für $\varkappa = -\infty$ abwechselnde Vorzeichen besitzen.
2. Zwei benachbarte a können nicht gleichzeitig verschwinden.
3. Ist $a_m = 0$, so haben a_{m+1} und a_{m-1} entgegengesetzte Vorzeichen.

Man hat also eine unvollkommene Sturmsche Kette und man hat den Satz:

Ist v grösser als die grösste Wurzel von $f(v, \varkappa) = 0$ für $\varkappa = \infty$ oder ist v kleiner als die kleinste Wurzel dieser Gleichung, so hat die Gleichung $f(v, \varkappa) = 0$ reelle, voneinander verschiedene Wurzeln $\varkappa$.

Für den zweiten Fall des Satzes, d. h. wenn $v < \frac{n}{2}$, gelten nämlich dieselben Betrachtungen, wenn man $\varkappa$ und $-\varkappa'$ vertauscht. Es ist ferner sofort klar, dass $f(v, \varkappa) = 0$, dieselben Wurzeln v hat, wie $f(v, -\varkappa) = 0$, doch gilt dieses nur für K und N; setzt man die rechte Seite von 11c'', bezüglich 11c''', $f_2(v, \varkappa)$, die von 11c''', bezüglich 11c''', $f_3(v, \varkappa)$, so ist für dasselbe v: $f_2(v, -\varkappa) = 0$ und $f_3(v, +\varkappa) = 0$; das Gleiche gilt von $f_3(v, -\varkappa)$ und $f_2(v, +\varkappa)$. Wir wollen jetzt noch zeigen, dass es immer Wurzeln v gibt, für welche $v < \frac{n}{2}$, bezüglich $v > \frac{n(n+1)}{2}$, wenn $\varkappa$ einen positiven reellen Wert hat; dasselbe gilt dann auch für negative $\varkappa$. Wäre nämlich $v_\varkappa$ die kleinste Wurzel und $v_\varkappa > \frac{n}{2}$, so ist nach 11)

$$(2n-1)\,a_1 = (2\bar{v}_\varkappa - n)\,\varkappa\,a_0;$$

also haben a_1 und a_0 in diesem Falle das gleiche Vorzeichen, dann würde aber folgen, dass es noch eine kleinere Wurzel als $\bar{v}_\varkappa$ gibt, da schon Vorzeichenwechsel verloren wurden; n ist dabei als gerade vorausgesetzt. Der Fall, wo n ungerade ist, erledigt sich analog.

Ist ferner die grösste Wurzel $\bar{\bar{v}}_\varkappa < \frac{n(n+1)}{2}$, so folgt aus

11c) $\quad (2\bar{\bar{v}}_\varkappa - n(n+1))\,\varkappa\,a_\sigma - (n+2)(n-1)\,a_{\sigma-1} = 0,$

dass a_σ und $a_{\sigma-1}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so dass es also noch grössere Wurzeln als $v_\varkappa$ gibt. Nimmt also $\varkappa$ nacheinander alle Werte von 1 bis unendlich an, so durchläuft die grösste Wurzel stetig abnehmend alle Werte zwischen n^2 und $\frac{n(n+1)}{2}$, die kleinste Wurzel alle zwischen 0 und $\frac{n}{2}$, wobei sie stetig zunimmt. Die gegebene Beweismethode ist jedoch in den Fällen, die 11c'') und 11γ'') entsprechen, nicht direkt anwendbar. Es folgt jedoch leicht, dass die grösste Wurzel grösser ist, als $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{9}{2}$; ein Resultat, das im wesentlichen dasselbe leistet, wie das in den anderen Fällen. Setzt man nämlich den betreffenden Wert ein, so sieht man unmittelbar, a_σ, $a_{\sigma-1}$, $a_{\sigma-2}$ haben verschiedene Vorzeichen, so dass es auch hier noch grössere v gibt.

Die gewonnenen Resultate werden übersichtlicher, wenn wir sie geometrisch interpretieren, es ergibt sich dann leicht ein neuer Beweis für dieselben, der jetzt alle Fälle umfasst.

Es sei $v = 0$ die Abscissenachse, $\varkappa = 0$ die Ordinatenachse. Wir wollen dann untersuchen, wie sich die Kurve $f(v, \varkappa) = 0$ im Unendlichen verhält. Zunächst hat die Kurve so viele Asymptoten parallel zur Abscissenachse, als der Grad ihrer Gleichung in Bezug auf v angibt. Für diese ist v gleich den früher für $\varkappa = \infty$ bestimmten Wurzeln. Es ist zu bemerken, dass im folgenden wiederum K als typischer Fall herausgegriffen wird. Dann sind aber noch 2 Fälle zu unterscheiden, je

nachdem der Grad von $f(v, \varkappa)$ in Bezug auf $\varkappa$ gerade oder ungerade ist. Ist der Grad nämlich ungerade, so zerfällt die Kurve in $\varkappa = 0$ und $f_1(v, \varkappa) = 0$; $f(v, \varkappa)$ bezüglich $f_1(v, \varkappa)$ sei vom Grade $2m$. Wir denken uns die Gleichung der Kurve nach Potenzen von $\varkappa$ geordnet; dann ist im ersten Falle, wo der Grad von $f(v, \varkappa)$ in Bezug auf $\varkappa$ gerade sein soll, der Koeffizient von $\varkappa^0$ in $f(v, \varkappa)$ von v unabhängig, im zweiten Falle dagegen ist der Koeffizient des von $\varkappa$ freien Gliedes in $f_1(v, \varkappa)$ von v linear abhängig.

Führt man jetzt homogene Koordinaten ein, so sieht man, dass für $\varkappa = 0$ im ersten Falle keine, im zweiten Falle eine und nur eine Wurzel v existiert, die endlich ist. Nun gehören zu jedem reellen Werte von $\varkappa$ nur reelle, voneinander verschiedene Wurzeln v ($\varkappa = 0$ ist dabei ausgeschlossen). Dieser Satz gilt aber für jedes noch so kleine, von Null verschiedene $\varkappa$. Bewegt sich nun $\varkappa$ von ∞ nach 1, so erhalten wir $2m$ bezüglich $2m + 1$ Kurvenzüge, die sich von den Punkten $2v = n(n+1)$ $2s^2, \varkappa = \varkappa$ nach den Punkten $v = (n - 2s)^2$, $\varkappa = 1$ hinziehen, ohne sich in einem Punkte gegenseitig schneiden zu können. Nähert sich aber $\varkappa$ der Null und zwar von der positiven Seite, so gehen $2m$ Zweige in das Unendliche, ebensoviele Zweige gehen wegen der Symmetrie auf der negativen Seite der $\varkappa$ in das Unendliche. Dieses ist aber nur dann möglich, wenn bei der Annäherung von der positiven Seite der $\varkappa$ an $\varkappa = 0$ m Zweige v positiv, m Zweige v negativ unendlich werden. Jetzt aber ist der Satz, den wir früher für die beiden Zweige abgeleitet haben, auf denen die grössten, bezüglich kleinsten Werte der v für jedes reelle $\varkappa$ liegen, evident. Derselbe sagt nämlich aus, dass diese beiden Kurven nirgends eine horizontale Tangente haben können, da diese mit der Kurve einen Schnittpunkt zu viel hätte.

Auch hier treten bezüglich L und M insofern Modifikationen ein, als die Symmetrie bezüglich der Ordinatenachse gestört ist, doch lässt sich gerade der letzte Satz durch diese Methode auch hier gerade so umfassend erweisen, wie in den anderen Fällen.

Von besonderer Bedeutung für das Folgende ist der folgende Satz: „Alle in der Theorie der Lamé'schen Funktionen mit reellen Parametern b und c auftretenden v sind nicht grösser als n^2, jedoch gibt es immer v, die nicht kleiner sind als $\frac{n(n+1)}{2}$."

Die beiliegenden Zeichnungen bestätigen die gefundenen Resultate. In Figur 1 ist $n = 6$; $2m = 4$; der betrachtete Fall K. Man hat dann die Gleichung

$$v^4 \varkappa^4 - 56 v^3 \varkappa^4 + 1078 v^2 \varkappa^4 - 7944 v \varkappa^4 + 15561 \varkappa^4 - 294 v^2 \varkappa^2 + 5640 v \varkappa^2 - 19026 \varkappa^2 + 3465 = 0.$$

Um günstigere Verhältnisse für die Zeichnung zu erhalten, ist der Massstab für die v ein anderer wie für die $\varkappa$, wodurch ja der Verlauf der Kurve nur unwesentlich verändert ist und zwar ist die Einheit für $\varkappa$ 5 mal grösser als für v.

In Figur 2 ist $n = 4$; der Grad von $f_1(v, \varkappa)$ ist $2m = 2$, man hat hier wieder den Fall K. Die Einheit der $\varkappa$ verhält sich zu der der v wie $2 : 1$.

Die Gleichung der Kurve ist

$$\varkappa^3 (v^3 - 20 v^2 + 116 v - 160) - (52 v - 160) \varkappa = 0.$$

Gänzlich verschiedenes Verhalten aber zeigt die Kurve, wenn man $\varkappa^2$ als unabhängige Variable einführt, wie Figur 3 zeigt. Dabei verhält sich die Einheit der $\varkappa$ zu der der v wie $2 : 5$. Man sieht, dass in diesem Falle 2 zu einem festen $\varkappa^2$ gehörige v im Punkte A zusammenfallen, im nächsten Paragraph werden wir allgemein darauf zurückkommen. Zunächst aber wollen wir noch untersuchen, ob für komplexe $\varkappa$ und für $|\varkappa| < 1$ sich angeben lässt, von welcher Ordnung v_s mit n höchstens unendlich wird; für reelle $\varkappa > 1$ haben wir dies schon früher getan. Sei $|\varkappa| > 1$ und $|2v| > 2n^2 + 2n + 2$ so ist in 11)

$$|2v - n(n+1) + (n - 2m)^2| \, |\varkappa| > 2(2n - 2m - 1)(m + 1),$$

wenn a_m ein beliebiger Koeffizient ist (m also eine andere Bedeutung hat, wie oben). Dann folgt durch vollständige In-

duktion, dass $|\alpha_{m+1}| > |\alpha_m|$, so dass die Gleichung keine Wurzel haben kann, die grösser ist, als $2n^2+2n+2$. Ist $|\varkappa|<1$, so zeigt man ebenso, dass die grösste Wurzel dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als $\frac{2n^2+2n+2}{|\varkappa|}$.

§ 3.

Die Laméschen Funktionen mit komplexen Parametern.

Wir haben im letzten Paragraph gesehen, dass für reelles $\varkappa$ die algebraische Gleichung für v voneinander verschiedene, reelle Wurzeln besitzt. Sind dagegen b und c und also auch $\varkappa$ komplexe Grössen, so können mehrere Wurzeln zusammenfallen. Da man in diesem Falle nicht mehr $2n+1$ Lamésche Funktionen hat, so muss man sich für die ausfallenden Funktionen, die die Integrale der Differentialgleichung 3) liefern sollten, Ersatz schaffen. Herr Fritz Cohn hat in seiner Inauguraldissertation: „Über Lamésche Funktionen mit komplexen Parametern“, Königsberg 1888. diese Frage behandelt, indem er die Wurzeln als Funktionen der Diskriminante Δ der algebraischen Gleichung darstellt. Wir wollen die dort gewonnenen Resultate hier ohne dieses Hilfsmittel möglichst elementar ableiten und zwar so, dass die bekannte Methode der Ableitung im allgemeinen Falle hier nur etwas abgeändert wird.

Zu diesem Zwecke setzen wir die rechte Seite von 1) gleich einer Funktion von c^2, b^2, v, z, die wir so bestimmen, dass die so entstehende Differentialgleichung für jedes Wertepaar b^2, c^2, bei beliebigem v ein rationales Integral hat. Im Falle K geschieht dieses dadurch, dass man die rechte Seite von 1) gleich $a_{\sigma+1}z^{-2}$ setzt, wenn n gerade ist, gleich $a_{\sigma+1}z^{-1}$, wenn n ungerade ist, dabei ist $a_{\sigma+1}$ eine ganze rationale Funktion von b^2 und c^2, ebenso von v, und zwar in Bezug auf v vom Grade $\sigma+1$. Früher hatten wir $\mathfrak{K}$ so bestimmt, dass $a_{\sigma+1}=0$ ist. Wir setzen

$$a_{\sigma+1} = r_n(b^2, c^2, v).$$

Das neue Integral dieser Differentialgleichung nennen wir $\bar{E}_s^n(z)$. Wir setzen $E_s^n(z)\ E_s^n(z')$ in die linke Seite von 3) ein, dann wird die rechte Seite in Bezug auf v eine rationale Funktion, ebenso in Bezug auf b^2, c^2, $\sqrt{z^2-b^2}$, $\sqrt{z^2-c^2}$, $\sqrt{z'^2-b^2}$, $\sqrt{z'^2-c^2}$, z, z'; wir nennen sie $R(b^2, c^2, z, z', v)$. Ist $a_{\sigma+1}=0$, so haben wir den Fall der gewöhnlichen Laméschen Funktionen und zwar der K, es wird dann auch

$$R(b^2, c^2, z, z', v) = 0$$

für jedes z und z'. Sei b reell, dann hat die Gleichung

$$r_n(b^2, c^2, v) = 0$$

für jedes reelle c bei festem b $\sigma+1$ verschiedene Wurzeln $\Re$, für die auch gleichzeitig $R(b^2, c^2, z, z', v)=0$ ist und zwar für jedes z und z'. Dieses ist nur dann möglich, wenn

$$12)\qquad R(b^2, c^2, z, z', v) = r_n(b^2, c^2, v)\cdot h(b^2, c^2, z, z', v),$$

dabei ist h eine ganze Funktion in Bezug auf v. Der Koeffizient der höchsten Potenz von v in r_n ist eine Potenz von p. Sehen wir von dem leicht übersichtlichen Ausnahmefalle ab, in dem $p=b^2+c^2=0$ ist, so gilt 12) für alle Werte b, c, v ohne weiteres.

Wir können nun die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(\bar{E}_s^n(z)\,E_s^n(z'))}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2(\bar{E}_s^n(z)\,E_s^n(z'))}{\partial\zeta^2}+n(n+1)(z^2-z'^2)\,E_s^n(z)\,E_s^n(z')$$
$$= r_n(b^2, c^2, v)\,h(b^2, c^2, z, z', v)$$

links und rechts nach v differentiieren, was sicher erlaubt ist, da die $E_s^n(z)$ rationale Funktionen von v sind.

Hat nun $r_n(b^2, c^2, v)=0$ die α fache Wurzel v_1, so hat 3) die Integrale

$$E_1^n(z)\,E_1^n(z'),\ \frac{d}{dv}(E_1^n(z)\,E_1^n(z'))=E_2^n(z, z'),\ \ldots\ \frac{d^{\alpha-1}}{dv^{\alpha-1}}(E_1^n(z)\,E_1^n(z'))$$
$$=\underset{\alpha}{E^n}(z, z')$$

und diese Funktionen dienen als Ersatz für die ausgefallenen Laméschen Funktionen, denn die durch dieselben ergänzten

$2n+1$ Integrale der partiellen Differentialgleichung 3) sind linear unabhängig, was schon daraus hervorgeht, dass die neu hinzugekommenen Integrale in Bezug auf den Grad in z und z' immer um Eins abnehmen, denn es ist

$$\frac{d\,a_0}{d\,v} = 0, \quad \frac{d^2 a_1}{d\,v^2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^{\tau+1} a_\tau}{d\,v^{\tau+1}} = 0.$$

Es lassen sich also die Kugelfunktionen C und S linear durch diese $2n+1$ Integrale darstellen.[1])

Dieses Resultat stimmt mit dem von Herrn Cohn[2]) für $a = 2$ abgeleiteten Resultate überein. Für L, M, N geht die Ableitung genau ebenso und wir haben nur K herausgegriffen, um einen bestimmten Fall zu haben, aus dem die Bedeutung der eingeführten Grössen hervorgeht. Man hat also den Satz: Die Entwicklung einer Funktion von z und z' nach Lamé-schen Produkten, sofern diese durch die vorher eingeführten Ersatzfunktionen ergänzt sind, ist immer möglich, wir müssen jedoch die bekannte Methode zur Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung etwas modifizieren, um auch den Ausnahmefall zu umfassen.

Wir benützen nämlich statt der Gleichung 1) diejenige, die wir schon früher an ihre Stelle treten liessen, ihre rechte Seite nennen wir $f_n(v)\ \varphi_n(z)$. Im Laufe der Entwicklung erhalten wir an Stelle von $\varphi_n(z)$ andere Funktionen, auf die es nicht näher ankommt, wir bezeichnen der Kürze wegen sie alle mit $\varphi_n(z)$.

Wir müssen uns jedoch zuvor die zu entwickelnde Funktion in 8 Teile

$$A + A_1\, z\cdot z' + (B + B_1\, z\, z')\sqrt{z^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - z'^2}$$
$$+ (C + C_1\, z\, z')\sqrt{c^2 - z^2}\,\sqrt{c^2 - z'^2}$$
$$+ (D + D_1\, z\, z')\sqrt{z^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - z'^2}\,\sqrt{c^2 - z^2}\,\sqrt{c^2 - z'^2}$$

zerlegt denken,[3]) entsprechend dem Verhalten der E^n, wo A, A_1 etc. ganze Funktionen von z und z' sind, $F(z, z')$

[1]) Heine, S. 376. [2]) l. c. S. 20. [3]) Heine, S. 377—381.

sei ein solcher Teil, der nach gleichartigen Lamé'schen Funktionen zu entwickeln ist.

Es gehören nun E_s^m und E_τ^n zu derselben Klasse; dann hat man

$$E_s^m \frac{d^2}{d\varepsilon^2} E_\tau^n - E_\tau^n \frac{d^2 E_s^m}{d\varepsilon^2} = [p(v_\tau^n - v_s^m) - (n(n+1) - m(m+1))z^2] E_s^m E_\tau^n + f_n(v_\tau^n)\varphi_n(z) - f_m(v_s^m)\varphi_m(z).$$

Es sei

$$\omega = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}; \quad \omega' = \int_0^b \frac{dz'}{\sqrt{(b^2-z'^2)(c^2-z'^2)}}$$

Dann findet man durch Integration nach ε

13a)
$$p(v_\tau^n - v_s^m)\int_0^\omega E_s^m(z) E_\tau^n(z)\, d\varepsilon = (n-m)(n+m+1)\int_0^\omega z^2 E_s^m(z) E_\tau^n(z')\, d\varepsilon + f_m(v_s^m)\varphi_m(\omega) - f_n(v_\tau^n)\varphi_n(\omega).$$

Ebenso

13b)
$$(n-m)(n+m+1)\int_0^{\omega'} z'^2 E_s^m(z') E_\tau^n(z')\, d\xi = p(v_\tau^n - v_s^m)\int_0^{\omega'} E_s^m(z') E_\tau^n(z')\, d\xi - f_m(v_s^m)\varphi_m(\omega') + f_n(v_\tau^n)\varphi_n(\omega').$$

Durch Multiplikation

$$p(v_\tau^n - v_s^m)(n-m)(n+m+1)\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^\omega (z^2 - z'^2) E_s^m(z) E_s^m(z') E_\tau^n(z) E_\tau^n(z')\, d\varepsilon = A f_n(v_\tau^n) + 2B f_n(v_\tau^n) f_m(v_s^m) + C f_m(v_s^m),$$

wobei A und C von ω, ω', v_τ^n, v_s^m, B von ω, ω' abhängig sind.

Ist $f_m(v_s^m) = 0$, ebenso $f_n(v_\tau^n) = 0$, so hat man den gewöhnlichen Fall und es ergeben sich sofort die bekannten Integralgesetze; ist nun v_s^m eine Doppelwurzel, so hat man geeignete Gleichungen nach v_s^m zu differentiieren.

So hat man, wenn $v_s^m \neq v_\tau^n$; $n \neq m$

$$\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^\omega (z^2 - z'^2) \frac{d}{d v_s^m} (E_s^m(z) E_s^m(z')) E_\tau^n(z) E_\tau^n(z')\, d\varepsilon = 0.$$

Ist dagegen $n = m$, so hat man, wenn $f_n(v_\tau^n) = 0$ ist

$$p\,(v_\tau^n - v_s^m) \int_0^\omega E_s^m(z)\, E_\tau^n(z)\, d\,\varepsilon = f_n(v_s^n)\, \varphi_n(\omega),$$

also

$$p\,(v_\tau^n - v_s^m) \int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega (z^2 - z'^2)\, E_s^n(z)\, E_\tau^n(z)\, E_s^m(z')\, E_\tau^n(z')\, d\,\varepsilon$$

$$= f_n(v_s^n)\, \bar{\varphi}_n(\omega, \omega'),$$

wobei $\bar{\varphi}_n(\omega, \omega')$, wie nochmals erinnert werden soll, eine leicht näher zu bestimmende Funktion ist, auf die es aber nicht ankommt. Ist v_s^n eine doppelte Wurzel von $f_n(v_s^n) = 0$ und ist $v_s^m \neq v_\tau^n$, so ist

14a) $$\int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega (z^2 - z'^2)\, E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z')\, E_s^n(z)\, E_s^n(z')\, d\,\varepsilon = 0$$

$$\int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega (z^2 - z'^2)\, E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z') \frac{d}{d\,v_s^n} (E_s^n(z)\, E_s^n(z'))\, d\,\varepsilon = 0.$$

Sei nun aber $v_\tau^n = v_s^m$, dann nehmen wir zunächst v_τ^n als fest und zwar als Wurzel von $f_n(v^n) = 0$ an, v_s^m dagegen als beweglich. Dann folgt aus 13a)

$$p\,(v_\tau^n - v_s^m) \int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega E_s^m(z)\, E_s^m(z')\, E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z')\, d\,\varepsilon = (n - m)(n + m + 1) \cdot$$

$$\int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega z^2\, E_s^m(z)\, E_\tau^n(z)\, E_s^m(z')\, E_\tau^n(z')\, d\,\varepsilon + f_m(v_s^m)\, \varphi_m(\omega, \omega').$$

Wir differentiieren nach v_s^m und setzen $v_s^m = v_\tau^n$, dabei soll v_s^m eine Doppelwurzel sein. Dann erhält man

$$-p \int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z')\, E_s^m(z)\, E_s^m(z')\, d\,\varepsilon = (n - m)(n + m + 1) \cdot$$

$$\int_0^{\omega'} d\,\xi \int_0^\omega z^2\, E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z') \frac{d}{d\,v_s^m} (E_s^m(z)\, E_s^m(z'))\, d\,\varepsilon.$$

Wir bilden aus 13b) den analogen Ausdruck und subtrahieren.

Dann hat man

14b) $$\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} (z^2 - z'^2)\, E_r^n(z)\, E_r^n(z') \frac{d}{dv_s^m} (E_s^m(z)\, E_s^m(z'))\, d\varepsilon = 0.$$

Ist aber auch $n = m$, so folgt aus 13a) durch Differentiation

$$p \int_0^{\omega} (E_s^n(z))^2\, d\varepsilon = 0$$

und

14c) $$\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} (z^2 - z'^2)\, (E_s^n(z))^2\, (E_s^n(z'))^2\, d\varepsilon = 0.$$

Dagegen ist

14d) $$2 \int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} (z^2 - z'^2)\, E_\tau^n(z)\, E_\tau^n(z') \frac{d}{dv_\tau^n} (E_r^n(z) E_r^n(z'))\, d\varepsilon = \alpha \neq 0.$$

$$2 \int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} (z^2 - z'^2) \left[\frac{d}{dv_\tau^n} E_r^n(z)\, E_\tau^n(z')\right]^2 d\varepsilon = \beta.$$

Sei nun

14e) $$\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} [(z^2 - z'^2)\, E_1(z)\, E_1(z')\, F(z z')]\, d\varepsilon = A.$$

14f) $$\int_0^{\omega'} d\xi \int_0^{\omega} (z^2 - z'^2) \frac{d}{dv} (E_1(z)\, E_1(z'))\, F(z, z')\, d\varepsilon = B$$

wenn wir die zu zusammenfallenden Wurzeln gehörenden Funktionen E_1 und E_2 nennen. Die Koeffizienten von $E_1(z)$ $E_1(z')$ bezüglich

$$\frac{d}{dv} (E_1(z)\, E_1(z'))$$

in der Entwicklung von $F(z,z')$ seien g_1 und g_2.

Dann hat man

$$g_2 \alpha = 2A;$$

$$g_1 \alpha + g_2 \beta = 2B.$$

$$15)^{1}) \quad F(z,z') = 2\frac{\alpha B - \beta A}{\alpha^2} E_1(z) E_1(z') + \frac{2A}{\alpha}\frac{d}{dv}(E_1(z) E_1(z')) + \sum_n{}' \sum_s{}' g_s^n E_s^n(z) E_s^n(z').$$

Man sieht nun sofort, wie man beim Falle mehrerer gleicher Wurzeln zu verfahren hat und es ist ein leichtes, in einem so gegebenen Falle die Formeln auf diese Weise abzuleiten. Herr Cohn zeigt direkt, dass beim Zusammenfallen zweier Wurzeln die Entwicklung von $F(z, z')$ in die obige übergeht, doch muss er zu diesem Zwecke eine grössere Anzahl algebraischer Sätze ableiten; die hier gegebene Methode ist dagegen nur eine Modifikation der Methode bei lauter verschiedenen Wurzeln und erfordert keine neuen Hilfsmittel.

Aus den abgeleiteten Integralsätzen geht überdies hervor, dass beim Zusammenfallen von Wurzeln die ursprüngliche Entwicklung in keine andere übergehen kann, als in die gegebene.

§ 4.

Die Laméschen Funktionen zweiter Art.

Wir haben bis jetzt Integrale der Differentialgleichung 1) betrachtet, welche rationale Funktionen von z, $\sqrt{z^2 - b^2}$, $\sqrt{z^2 - c^2}$ waren. Jede Differentialgleichung 1) hat aber noch ein zweites partikuläres Integral, welches im Unendlichen von $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet. Dieses Integral, welches zuerst von Heine und Liouville eingeführt wurde, bezeichnet man mit $F_s^n(z)$. Herr Professor Lindemann hat diese Funktion für eine komplexe Veränderliche untersucht,[2]) sich jedoch auf die Klasse K beschränkt. Es soll hier die Untersuchung auch für die 3 anderen Fälle durchgeführt werden, um ein vollständiges System von Formeln zu erhalten. Bekanntlich ist

$$16) \quad F_s^n(z) = (2n+1) E_s^n(z) \int_z^\infty \frac{dz}{[E_s^n(z)]^2 \sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)}}.$$

[1]) Cohn, l. c. S. 31.

[2]) Mathematische Annalen, Band 19, S. 336 ff.

Heine[1]) zeigt dann, dass dieses Integral nur elliptische Integrale 1. und 2. Gattung enthält, indem er die Rechnung für den Fall K durchführt. Für die anderen Fälle ergibt sich der Satz ganz analog, wir wollen die betreffenden Formeln hier ableiten, da wir sie nachher so wie so brauchen. Es ist

17) $$F(z) = E(z)\,(\chi(\infty) - \chi(z))$$

wobei

$$\chi(z) = (2n+1)\int_c^z \frac{dz}{[L(z)]^2\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}}.$$

Es sei

$$L(z) = \sqrt{z^2-b^2}\,u_1; \quad M(z) = \sqrt{z^2-c^2}\,u_2;$$
$$N(z) = \sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}\,u_3;$$

dann haben die u nur voneinander verschiedene Wurzeln α. Σ erstrecke sich im folgenden über alle α; f' bedeute die Ableitung von $f(z)$ nach z. Dann hat man

$$\frac{1}{[L(z)]^2} = \Sigma\left\{\frac{1}{(L'(\alpha))^2(z-\alpha)^2} - \frac{L''(\alpha)}{(L'(\alpha)^3(z-\alpha)}\right\}$$
$$+\frac{1}{2(u_1(b))^2 b(z-b)} - \frac{1}{2(u_1(b))^2 b(z+b)}$$

$$\frac{1}{[M(z)]^2} = \Sigma\left\{\frac{1}{(M'(\alpha))^2(z-\alpha)^2} - \frac{M''(\alpha)}{(M'(\alpha))^3(z-\alpha)}\right\}$$
$$+\frac{1}{2(u_2(c))^2 c(z-c)} - \frac{1}{2(u_2(c))^2 c(z+c)}$$

$$\frac{1}{[N(z)]^2} = \Sigma\left\{\frac{1}{(N'(\alpha))^2(z-\alpha)^2} - \frac{N''(\alpha)}{(N'(\alpha))^3(z-\alpha)}\right\}$$
$$+\frac{1}{2(u_3(b))^2(b^2-c^2)b(z-b)} - \frac{1}{2(u_3(b))^2(b^2-c^2)b(z+b)}$$
$$+\frac{1}{2(u_3(c))^2(c^2-b^2)c(z-c)} - \frac{1}{2(u_3(c))^2(c^2-b^2)c(z+c)}$$

[1]) Heine, S. 386.

Die Glieder, welche $(z-a)^2$ und $(z-a)$ im Nenner haben, geben in $\chi(z)$ eingesetzt

$$(2n+1)\,\Sigma\frac{1}{(E'(a))^2}\,\frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{z^2-b^2}\,\sqrt{z^2-c^2}}{z-a}-a^2\xi+\int_0^{\xi}z^2\,d\xi\right].$$

Sei $$\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}=R(z);$$

dann ist

$$\int\frac{dz}{(z-b)\sqrt{R(z)}}=\frac{2}{R'(b)}\left[-\frac{\sqrt{R(z)}}{z-b}-b^2\xi+\int z^2\,d\xi\right].$$

$$\int\frac{dz}{(z+b)\sqrt{R(z)}}=\frac{-2}{R'(b)}\left[-\frac{\sqrt{R(z)}}{z+b}-b^2\xi+\int z^2\,d\xi\right].$$

Analoge Formeln erhält man, wenn überall statt b c eingesetzt wird.

Sei nun

18a) $$\Sigma\frac{(2n+1)\,L(z)\sqrt{z^2-b^2}}{R(a)\,(L'(a))^2\,(z-a)}+\frac{(2n+1)\,2z\,u_1(z)}{b\,(u_1(b))^2\,R'(b)}=G_1(z).$$

$$\Sigma\frac{(2n+1)\,a^2}{(L'(a))^2\,R(a)}+\frac{(2n+1)\,2b}{(u_1(b))^2\,R'(b)}=\mathfrak{a}_1.$$

$$\Sigma\frac{2n+1}{(L'(a))^2\,R(a)}+\frac{2\,(2n+1)}{(u_1(b))^2\,R'(b)\,b}=\mathfrak{b}_1.$$

Vertauscht man b und c, setzt überall den Index 2 statt 1, dann erhält man die entsprechenden Formeln für M.

Endlich setzen wir für N

18b) $$\Sigma\frac{(2n+1)\,N(z)\sqrt{R(z)}}{R(a)\,(N'(a))^2\,(z-a)}+\frac{(2n+1)\,2z\,u_3(z)\,(z^2-c^2)}{(u_3(b))^2\,(b^2-c^2)\,b\,R'(b)}$$

$$+\frac{(2n+1)\,2z\,u_3(z)\,(z^2-b^2)}{(u_3(c))^2\,(c^2-b^2)\,c\,R'(c)}=G_3(z).$$

$$\sum \frac{(2n+1)\,a^2}{(N'(a))^2 R(a)} + \frac{(2n+1)\,2b}{(u_3(b))^2 (b^2-c^2) R'(b)} + \frac{(2n+1)\,2c}{(u_3(c))^2 (c^2-b^2) R'(c)} = \mathfrak{a}_3.$$

$$\sum \frac{2n+1}{(N'(a))^2 R(a)} + \frac{2(2n+1)}{b(u_3(b))^2 (b^2-c^2) R'(b)} + \frac{2(2n+1)}{c(u_3(c))^2 (c^2-b^2) R'(c)} = \mathfrak{b}_3.$$

Ferner ist

$$\int_c^z \frac{z^2\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{\sqrt{R(z)}}{z} + b\,k' \int_z^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}},$$

wobei

$$k' = \frac{b}{c}.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in 17) ein und reduzieren soweit wie möglich: dabei werden sich in den letzten beiden Fällen gewisse Ausdrücke, die unendlich werden, wegheben.

Man hat dann

19a)

$$L(z)\{\chi_1(\infty)-\chi_1(z)\} = \sqrt{z^2-c^2}\,G_1(z)+\sqrt{z^2-b^2}\,u_1(z)\int_c^z \frac{(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{b}_1 z^2)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ L(z)\left\{-\frac{\mathfrak{a}_1}{c}K' + \mathfrak{b}_1\,b\,k'\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}\right\}.$$

Ebenso

19b)

$$M(z)(\chi_2(\infty)-\chi_2(z)) = \sqrt{z^2-b^2}\,G_2(z)+\sqrt{z^2-c^2}\,u_2(z)\int_c^z \frac{(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{b}_2 z^2)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ M(z)\left\{-\frac{\mathfrak{a}_2}{c}K' + \mathfrak{b}_2\,b\,k'\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}\right\}.$$

19c)

$$N(z)(\chi_3(\infty)-\chi_3(z)) = G_3(z)+\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}\,u_3(z)\int_c^z \frac{(\mathfrak{a}_3-\mathfrak{b}_3 z^2)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ N(z)\left\{-\frac{\mathfrak{a}_3}{c}K' + \mathfrak{b}_3\,b\,k'\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}\right\}.$$

Dabei ist

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}}.$$

Durch diese Integralausdrücke sind die $F_s^{(n)}(z)$ für alle Werte von z dargestellt. Man kann aber die $F_s^{(n)}(z)$ natürlich auch durch Potenzreihen definieren, welche nach absteigenden Potenzen von z geordnet sind und die mit der $-(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz beginnen. Es folgt dann unmittelbar aus der Form der Differentialgleichung 1), dass diese Potenzreihen für alle $z > c$ konvergieren. Um die Funktionen auch für $z < c$ einfach untersuchen zu können, betrachtet Herr Professor Lindemann[1]) die $F^{(n)}$ als Funktionen von ζ, wobei ζ durch 4) definiert ist.

Es zeigt sich dann, dass für alle Werte von ζ, für welche

$$|\zeta| < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \varrho_0$$

ist, F_n in eine nach steigenden Potenzen von ζ geordnete Reihe entwickelt werden kann, die mit ζ^{n+1} beginnt.

Dabei ist zu erinnern, dass dem Kreise $|\zeta| = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ jene Kurve entspricht, die den Koordinatenanfangspunkt der z Ebene als Doppelpunkt hat. Ist $\zeta = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$, so erhalten wir je für das Innere der beiden in der z Ebene entstehenden Schleifen eine Entwicklung nach auf- und absteigenden Potenzen von ζ. Wir brauchen im folgenden nur die nach steigenden Potenzen von ζ fortschreitende Entwicklung

$$20) \qquad F_s^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \zeta^{n+2i+1}.$$

[1]) l. c. S. 338 u. f.

Dann hat man die Rekursionsformeln

20a) $$\beta_1 (2n+3) = -\varkappa [(n+1) + 2\nu_s] \beta_0.$$

$$2(2n+5)\beta_2 = -\varkappa [5n+9+2\nu_s]\beta_1 - (n+1)\beta_0.$$

. . . . . .

$$(j+1)\beta_{j+1}(2n+2j+3)$$

$$= -\varkappa [(4j+1)n + (2j+1)^2 + 2\nu_s]\beta_j - (2j-1)(n+j)\beta_{j-1}.$$

. . . . . .

Um β_0 durch a_0 auszudrücken, hat man

$$\lim_{z=\infty} z^{n+1} F_s^n(z) = \beta_0 \left(\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2}\right)^{n+1}$$

und

$$\lim_{z=\infty} z^{n+1} E_s^n(z) \int_z^\infty \frac{d\xi}{[E_s^n(z)]^2} = \lim_{z=\infty} \frac{-1}{[E_s^n(z)]^2 \sqrt{(z^2-c^2)(z^2-b^2)}} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^{n+1} E_s^n(z)}\right)$$

$$= \frac{1}{a_0(2n+1)},$$

also

20b) $$\beta_0 = \frac{1}{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^{n+1}.$$

Die Beweise für die eben zitierten Sätze sind von Herrn Professor Lindemann so geführt, dass sie unmittelbar für alle Laméschen Funktionen zweiter Art gelten. Das Verhalten längs der Linie $C\,0\,C'$ muss für jede einzelne Klasse eigens untersucht werden. Wir wollen die verschiedenen Funktionen durch die Bezeichnung unterscheiden. Die zu K gehörige Funktion zweiter Art sei $F_{s0}^n(z)$; die zu L gehörige $F_{s1}^n(z)$, die zu M gehörige $F_{s2}^n(z)$, die zu N gehörige $F_{s3}^n(z)$. Längs c, 0, $-c$ sind nun die $F_s^n(z)$ unstetig, man bezeichnet in bekannter Weise die beiden Werte mit $F_s^n(x+i\,0)$ und $F_s^n(x-i\,0)$. Um alle Schwierigkeiten zu vermeiden, die allenfalls durch

das Nullwerden der $E_s^n(z)$ hereinkommen könnten, bedienen wir uns gleich der umgeformten Integrale. Sei dann

I. $b < x < c$,

dann ist

21a) $$F_{s1}^n(x - i0) - F_{s1}^n(x + i0) =$$

$$- 2i\, G_{s1}^n(x)\sqrt{c^2 - x^2} + 2\, L_s^n(x)\, i \int_c^x \frac{(\mathfrak{a}_{s1}^n - \mathfrak{b}_{s1}^n z^2)\, dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)(c^2 - z^2)}}$$

Dabei wurde die Bezeichnung in leicht übersichtlicher Weise abgeändert.

Man hat dabei alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen.

Ebenso hat man

21b) $$F_{s2}^n(x - i0) - F_{s2}^n(x + i0)$$

$$= -2i\sqrt{c^2 - x^2}\, u_{s2}^n(x)\left\{ -\frac{\mathfrak{a}_{s2}^n}{c} K' + \mathfrak{b}_{s2}^n\, b\, k' \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}} \right\}$$

21c) $$F_{s3}^n(x - i0) - F_{s3}^n(x + i0)$$

$$= -2i\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - b^2)}\, u_{s3}^n(x)\left\{ \frac{\mathfrak{a}_{s3}^n}{c} K' + \mathfrak{b}_{s3}^n\, b\, k' \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}} \right\}$$

II. Es sei $-b < x < +b$, dann hat man

21d) $$F_{s1}^n(x - i0) - F_{s1}^n(x + i0)$$

$$= -2i\sqrt{c^2 - x^2}\, G_{s1}^n(x) + 2i\sqrt{b^2 - x^2}\, u_{s1}^n(x) \int_b^x \frac{(\mathfrak{a}_{s1}^n - \mathfrak{b}_{s1}^n z^2)\, dz}{\sqrt{(c^2 - z^2)(b^2 - z^2)}}$$

$$- 2i\sqrt{b^2 - x^2}\, u_{s1}^n(x)\left\{ \frac{\mathfrak{a}_{s1}^n}{c} K' + \mathfrak{b}_{s1}^n\, b\, k' \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}} \right\}$$

21e) $$F_{s2}^n(x - i0) - F_{s2}^n(x + i0)$$

$$= -2i\sqrt{b^2 - x^2}\, G_{s2}^n + 2i\sqrt{c^2 - x^2}\, u_{s2}^n(x) \int_b^x \frac{(\mathfrak{a}_{s2}^n - \mathfrak{b}_{s2}^n z^2)\, dz}{\sqrt{(b^2 - z^2)(c^2 - z^2)}}$$

$$- 2i\sqrt{c^2 - x^2}\, u_{s2}^n(x)\left\{ \frac{\mathfrak{a}_{s2}^n}{c} K' + \mathfrak{b}_{s2}^n\, b\, k' \int_0^1 \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}} \right\}$$

21f) $$F^n_{s3}(x-i0) - F^n_{s3}(x+i0)$$
$$= -2i\,u^n_{s3}(x)\sqrt{(c^2-x^2)(b^2-x^2)}\int_c^b \frac{(a^n_{s3}-b^n_{s3}z^2)\,dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(z^2-b^2)}}\,.$$

III. Es sei $-c<x<-b$, dann hat man

21g) $$F^n_{s1}(x-i0) - F^n_{s1}(x+i0)$$
$$= -2i\sqrt{(c^2-x^2)}\,G^n_{s1}(x) \quad 2i\sqrt{x^2-b^2}\,u^n_{s1}(x)\int_c^x \frac{(a^n_{s1}-b^n_{s1}z^2)\,dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(z^2-b^2)}}.$$

21h) $$F^n_{s2}(x-i0) - F^n_{s2}(x+i0)$$
$$= +2i\sqrt{c^2-x^2}\,u^n_{s2}(x)\int_{+b}^{-b} \frac{(a^n_{s2}-b^n_{s2}z^2)\,dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(b^2-z^2)}}$$
$$-2i\sqrt{c^2-x^2}\,u^n_{s2}(x)\left\{-\frac{a^n_{s2}}{c}K' + b^n_{s2}\,b\,k'\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}\right\}.$$

21i) $$F^n_{s3}(x-i0) - F^n_{s3}(x+i0)$$
$$= -2i\sqrt{(c^2-x^2)}\,\overline{(x^2-b^2)}\,u^n_{s3}(x)\int_{+b}^{-b} \frac{(a^n_{s3}-b^n_{s3}z^2)\,dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(b^2-z^2)}}$$
$$+2i\sqrt{(c^2-x^2)(x^2-b^2)}\,u^n_{s3}(x)\left\{\frac{a^n_{s3}}{c}K' + b^n_{s3}k'\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}\right\}.$$

Dabei sind, wie schon bemerkt, alle Quadratwurzeln positiv zu nehmen, ferner ist die Integration immer längs der Achse des Reellen auszuführen. Die obigen Formeln werden dann leicht gewonnen aus dem bekannten Verhalten der Quadratwurzeln auf den verschiedenen Wegen.

Da die Linie $-c$, 0, $+c$ nicht überschritten werden darf, so ist klar, dass die ganze Untersuchung nur für das erste Blatt der am Ende von § 1 betrachteten Riemannschen Fläche über z gilt.

Aus den abgeleiteten Formeln folgt, dass überall die Differenz

$$F_s^n(x - i\,0) - F_s^n(x + i\,0)$$

rein imaginäre Werte hat. Ebenso folgt aus der Form der in Betracht kommenden Funktionen, dass die Summe

$$F_s^n(x + i\,0) + F_s^n(x - i\,0)$$

rein reelle Werte besitzt, wovon man sich auch leicht direkt überzeugen kann. Nun ist $F_s^n(x)$ für die Linie $c\,0\ -c$ überhaupt nicht definiert, es ist daher zweckmässig, für alle reellen x, bei denen $|x| < c$

$$22) \qquad F_s^n(x) = \frac{1}{2}(F_s^n(x + i\,0) + F_s^n(x - i\,0))$$

zu setzen. Die so definierte Funktion genügt der Differentialgleichung 1). Denn die Koeffizienten von 1) sind eindeutige Funktionen, also sind $F_s^n(x + i\,0)$ und $F_s^n(x - i\,0)$ partikuläre Integrale von 1), also ist auch $F_s^n(x)$ ein solches.

Ferner ist $F_s^n(x)$ in der ganzen Achse des Reellen stetig und reell.

Man hat jetzt zu untersuchen, welche Modifikationen eintreten, wenn man komplexe Parameter zulässt. Sind also b^2 und c^2 komplex, so sind es auch die Wurzeln von $F_s^n(x) = 0$ im allgemeinen Falle.

Man lege durch $+c, +b, -b, -c$ und diese Nullstellen eine Kurve, die nicht überschritten werden darf, dabei soll die Kurve nirgends sich selber schneiden. Die Forderung, dass die Kurve durch die Nullstellen von $F_s^n(x)$ geht, ist unwesentlich. Im übrigen gestalten sich die Untersuchungen genau wie bei reellen Parametern, man wird $F_s^n(x)$ für die Punkte der Schnittlinie analog als Mittelwert definieren, natürlich fallen die Sätze weg über die Realität.

§ 5.

Die Grenzwerte von E^n und F^n für unendlich grosse Werte von n.

Es ist von Interesse, Näherungswerte für E^n und F^n aufzustellen, wenn n sehr gross wird. Solche Näherungswerte wurden für die Kugelfunktionen zuerst von Laplace aufgestellt, Herr Professor Lindemann[1]) hat dann solche Näherungswerte auch für die Laméschen Funktionen erster und zweiter Art berechnet, jedoch dabei die Annahme gemacht, dass alle v_s^n endlich bleiben für beliebig grosse n, so dass sie gegen n vernachlässigt werden können. Da aber, wie im § 2 gezeigt wurde, es immer v_s^n gibt, die mit n unendlich werden, sei es von derselben Ordnung wie n, sei es von derselben wie n^2, so erhält man, wenn man die Konvergenz von Reihen vermittelst dieser Näherungswerte untersucht, Bedingungen, die zwar im allgemeinen wohl notwendig sind, von denen man aber keineswegs weiss, ob sie auch immer hinreichend sind.

Um nun zu sehen, ob neue notwendige Bedingungen für die Konvergenz der später zu untersuchenden Reihen durch den Umstand hereinkommen, dass einige v_s^n von der Ordnung n unendlich werden, wollen wir hier die Näherungswerte auch für solche v_s^n berechnen.

Wir wollen jedoch zuerst einige einfache Sätze über die Zulässigkeit solcher Näherungswerte zusammenstellen, da man sonst leicht die Bedingungen übersieht, unter denen sie gelten. Zunächst gilt die Darstellung durch Näherungswerte im allgemeinen dann und nur dann, wenn innerhalb des betreffenden Bereiches für alle n, die eine gewisse Grösse überschreiten, die ursprüngliche Reihe und die Reihe, welche den Näherungswert darstellt, konvergieren. Dabei kann jedoch die ursprüngliche Funktion möglicherweise eine ganze, rationale Funktion n^{ten} Grades sein. Wir verstehen hier jedoch unter Konvergenz folgendes:

[1]) l. c. S. 343.

$G_n(z)$ konvergiert für alle $|z'| < z$ und genügend grosse n, wenn sich zu jedem beliebig kleinen ε ein m so gross bestimmen lässt, dass für alle in Betracht kommenden n die Summe aller Glieder hinter dem m^{ten} in dem betrachteten Intervalle dem absoluten Betrage nach kleiner wird als ε; m ist dabei von n zunächst völlig unabhängig. Es sei nun bewiesen, dass in einem gewissen Bereiche

$$\lim_{n=\infty} G_n(z) = G(z)$$

ist. Man kann dann nicht genug hervorheben, dass, wenn $G(z)$ in einem grösseren Bereiche konvergiert, dieses für $G_n(z)$ nicht der Fall zu sein braucht, wie gross man auch n wähle und umgekehrt; $G_n(z)$ und $G(z)$ sind immer eigens auf die Konvergenz zu untersuchen. Sei z. B.

$$G_n(z) = 1 + \frac{z}{n} + \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} z^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n-1)(n-2)} z^3 + \cdots \frac{n!}{n!} z^n.$$

Dann ist, wie aus einer nachher etwas allgemeiner anzugebenden Beweismethode leicht folgt

$$\lim_{n=\infty} G_n(z) = G(z) = 1$$

für alle $|z| < 1$. $G(z)$ konvergiert aber für alle Werte von z, man darf also nicht daraus auf die Konvergenz von $G_n(z)$ für alle z schliessen, wie man vielleicht in weniger übersichtlichen Fällen versucht sein dürfte zu schliessen.

Den positiven Teil des vorher allgemein ausgesprochenen Satzes wollen wir jetzt an einem Beispiele erläutern, das wir später brauchen werden, doch werden alle Schlüsse so geführt, dass sie auch im allgemeinen gelten. Wir untersuchen

$$F\left(\tfrac{1}{2} - n, 1, n + \tfrac{3}{2}, \xi^2\right) = F_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^{2\nu}$$

wobei $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die hypergeometrische Reihe darstellt; es ist also

$$F_n = 1 - \frac{n - \frac{1}{2}}{n + \frac{3}{2}} \xi^2 + \frac{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})}{(n + \frac{3}{2})(n + \frac{5}{2})} \xi^4 - \frac{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})(n - \frac{5}{2})}{(n + \frac{3}{2})(n + \frac{5}{2})(n + \frac{7}{2})} \xi^6 + \cdots$$

und diese Reihe konvergiert sicher für alle $|\xi| < 1$.

Für eben diese ξ nähert sich F_n mit wachsendem n der Reihe

$$F = 1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 \ldots = \frac{1}{1+\xi^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \xi^{2\nu}.$$

Sei nun ε irgend eine beliebig klein vorgegebene Zahl; wir nehmen dann zunächst an, es sei

$$\xi | < | \xi_1 | < 1.$$

Dann sei m_1 die erste Zahl, so dass für alle $m \geqq m_1$

$$\sum_{\mu=m}^{\infty} | \xi_1 |^{2\mu} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist also m_1 eine wohl bestimmte Funktion von ε, die von n gar nicht abhängt. Nun ist aber für jedes n und jedes ν $a_\nu < 1$; also gilt für jedes n a fortiori die Ungleichung

$$\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} | a_\nu | \, | \xi_1 |^{2\nu} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sei nun

$$\sum_{\nu=0}^{m_1} a_\nu \xi^{2\nu} = H_{m_1}; \quad \sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} a_\nu \xi^{2\nu} = R_{m_1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{m_1} b_\nu \xi^{2\nu} = J_{m_1}; \quad \sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} b_\nu \xi^{2\nu} = S_{m_1}.$$

Dann ist

$$J_{m_1} - H_{m_1} = [1 - 1] - \left[1 - \frac{n - \frac{1}{2}}{n + \frac{3}{2}}\right] \xi^2 + \ldots$$

$$+ (-1)^{m_1} \left[1 - \frac{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \ldots (n - \frac{2m_1 - 1}{2})}{(n + \frac{3}{2})(n + \frac{5}{2}) \ldots (n + \frac{2m + 1}{2})} \right] \xi^{2m_1}.$$

Alle Koeffizienten der Reihe sind dem absoluten Betrage nach kleiner als der letzte, dieser sei C genannt.

Dann ist

$$C = 1 - \frac{n^{m_1} + a_0 n^{m_1-1} \ldots a_{m_1-1}}{n^{m_1} + b_0 n^{m_1-1} \ldots b_{m_1-1}};$$

dabei hängen die $a_0 \ldots a_{m_1-1}$; $b_0 \ldots b_{m_1-1}$ nur von m_1 ab. Lassen wir n nun sehr grosse Werte annehmen, so wird dieser Ausdruck sehr klein, wir bestimmen dann n_1 so, dass n_1 die erste Zahl ist, so dass

$$C < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1 - |\xi_1|^2}{|\xi_1|^2},$$

wenn $n \geq n_1$. Dadurch ist n_1 als eine Funktion von ε und m_1, also von ε allein festgelegt und wohl bestimmt.

Dann ist aber

$$|J_{m_1} - H_{m_1}| < |\xi_1|^2 \frac{1 - |\xi_1|^{2m_1-2}}{1 - |\xi_1|^2} \frac{1 - |\xi_1|^2}{|\xi_1|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}; \text{ wenn } n \geq n_1.$$

Ferner ist aber schon bewiesen, dass

$$|S_{m_1} - R_{m_1}| < |S_m| + |R_{m_1}| < \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Also ist

23) $$|J_{m_1} + S_{m_1} - H_{m_1} - R_{m_1}| = |F - F_n| < \varepsilon$$

wenn $n \geq n_1$, $|\xi| \leq |\xi_1|$.

Die bei dieser Ableitung benützte Methode stützt sich wesentlich darauf, dass die beiden Reihen konvergieren, wenn $|\xi| < \xi_1| < 1$ und zwar natürlich gleichmässig für alle ξ. Durch genau dasselbe Verfahren lässt sich also der allgemeine Satz beweisen.

Auf die Frage, ob die analytischen Fortsetzungen der ursprünglichen Funktion und der Grenzfunktion noch ausserhalb des ursprünglichen Bereiches die Eigenschaft besitzen, dass die eine für sehr grosse Werte von n der anderen beliebig nahe kommt, soll nicht näher eingegangen werden. Es ist nur zu bemerken, dass es solche Funktionen gibt, z. B. $\frac{1}{1 - \frac{n+1}{n} x}$;

während sich leicht unendlich viele Beispiele jeder Art bestimmen lassen, die die obige Eigenschaft nicht haben; z. B.

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu; \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n+\nu}{n+\nu+1} x^\nu.$$

Wir gehen nach diesen allgemeinen Bemerkungen zu den Grenzwerten der E^n und F^n für sehr grosse Werte von n über und zwar zunächst noch einmal zu dem von Herrn Professor Lindemann behandelten Falle, wo die v_s^n endliche Werte haben; da bezüglich der Übereinstimmung mit dem Näherungswerte auf Grund der oben gemachten Untersuchungen einiges zu sagen ist.

Man geht dazu von den Formeln 5) aus und untersucht die nach positiven Potenzen von ζ und die nach negativen Potenzen geordneten Ausdrücke gesondert. Dann hat man noch die beiden Fälle zu unterscheiden, in denen z als expliziter Faktor auftritt oder nicht.

Wir betrachten zuerst den Fall, in dem z nicht auftritt. Dann sei

$$\varphi_n(\zeta^2) = a_0 + a_1 \zeta^2 + \ldots + a_\sigma \zeta^{2\sigma}.$$

Existiert dann ein Näherungswert $\varphi(\zeta^2)$, so hat man für seine Koeffizienten $\bar{a}_i$ die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= -\tfrac{1}{2} \varkappa \bar{a}_0 \\ 2\,\bar{a}_2 &= -\tfrac{5}{2} \varkappa \bar{a}_1 - \tfrac{1}{2} \bar{a}_0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ (i+1)\,\bar{a}_{i+1} &= -\tfrac{1}{2}(4i+1) \varkappa \bar{a}_i - \tfrac{1}{2}(2i-1)\,\bar{a}_{i-1}. \end{aligned}$$

Dieses System geht nun bis in das Unendliche, während z. B. bei geradem n im Falle K das System abbricht mit

$$(2v - n(n+1)) \varkappa a_\sigma = (n+2)(n-1)\, a_{\sigma-1}.$$

Nun folgt aus einem bekannten Satze des Herrn Poincaré,[1]) dass

$$\lim_{i=\infty} \frac{\bar{a}_{i+1}}{\bar{a}_i} = A$$

[1]) American Journal of Mathematics, Band 7, S. 213.

existiert, wobei A eine Wurzel der Gleichung

$$A^2 + 2\varkappa A + 1 = 0,$$

also

$$A = -\frac{c-b}{c+b} \text{ oder } A = -\frac{c+b}{c-b}.$$

In der Tat findet man auch

$$\varphi(\zeta^2) = \alpha_0 (\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1)^{-\frac{1}{4}},$$

also konvergiert die Reihe für

$$|\zeta| < \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Wir wollen jetzt einen Bereich angeben, innerhalb dessen $\varphi_n(\zeta^2)$ unter den gegebenen Voraussetzungen sicher konvergiert. Es ist nämlich

$$|\alpha_i| < \beta_i$$

wenn β_i definiert ist durch das Gleichungssystem

$$(i+1)(2n-2i-1)\beta_{i+1} = \left\{2i(n-i) + \frac{n}{2}\right\}(2\varkappa+1)\beta_i,$$

wobei $\beta_0 = \alpha_0$ sein soll.

Ferner soll sich das System nur bis β_σ erstrecken, d. h. es soll $\beta_\nu = 0$ sein, wenn $\nu > \sigma$ ist. Dann ist aber

$$\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} = (2\varkappa+1)\frac{2i(n-i) + \frac{n}{2}}{2i(n-i) + 2n - 3i - 1} \leqq 2\varkappa + 1$$

für alle in Betracht kommenden i.

Dadurch ist aber der Konvergenzbereich für die Reihe mit den Koeffizienten β bestimmt und in diesem Bereiche konvergiert also a fortiori $\varphi_n(\zeta^2)$ in dem früher festgelegten Sinne. Dann folgt aber aus dem früheren, dass innerhalb dieses Bereiches $\varphi(\zeta^2)$ wirklich der Grenzwert von $\varphi_n(\zeta^2)$ ist und zwar sicher, wenn

$$|\zeta| < \frac{1}{\sqrt{2\varkappa+1}}.$$

Der zweite Teil, der noch zu untersuchen ist, hat die Form

$$\zeta^n \left[a_0 + a_1 \zeta^{-2} + a_2 \zeta^{-4} \ldots\ldots + a_{n-1} \zeta^{-n+2}\right].$$

Zwar wird dieser selbst nicht beliebig klein in dem betrachteten Bereiche, jedoch gilt das, wenn wir ihn mit ζ^n multiplizieren, denn dann haben wir einen Ausdruck, der im früheren Sinne konvergiert, es sind nämlich alle Glieder dem absoluten Betrage nach kleiner als die entsprechenden von $\varphi_n(\zeta^2)$; ferner werden die ersten Glieder beliebig klein, es folgt also, dass der mit ζ^n multiplizierte zweite Teil sich mit wachsendem n in dem in Betracht kommenden Bereiche der Null nähert. Der mit ζ^n multiplizierte erste Teil nähert sich aber dem Werte $\varphi(\zeta^2)$; also wird für sehr grosse n der zweite Teil gegenüber dem ersten zu vernachlässigen sein.

Man findet dann, wenn man a_0 passend bestimmt, als Näherungswert von $E_s^n(z)$ [1])

$$24) \qquad E_s^n(z) = \frac{\zeta^{-n}\sqrt{(c^2-b^2)^n}\, a_0}{2^n \sqrt{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}},$$

wenn

$$|\zeta| < \sqrt{\frac{1}{2\varkappa+1}}.$$

Auch in dem zweiten Falle kommt man durch analoge Betrachtungen zu demselben Resultate.

Für $F_s^n(z)$ findet man analog

$$25) \qquad F_s^n(z) = \frac{2^{n+1}\,\zeta^{n+1}}{a_0 (\sqrt{c^2-b^2})^{n+1}\sqrt{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}},$$

wobei über die Gültigkeit dieser Formel dieselben Bemerkungen zu machen sind wie bei den $E_s^n(z)$.

Wir kommen dann zu dem Falle, wo $v_s^n = \lambda_n \cdot n$ ist, λ_n soll dabei mit n nicht in das Unendliche wachsen, d. h. λ_n soll für alle n unter einer festen Zahl liegen.

---

[1]) Lindemann, l. c. S. 346.

Dann folgt analog wie früher

$$2\,\bar{a}_1 = (2\lambda - 1)\,\varkappa\, a_0$$
$$2\cdot 2\,\bar{a}_2 = (2\lambda - 5)\,\varkappa\,\bar{a}_1 - \bar{a}_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2\,(i+1)\,\bar{a}_{i+1} = [2\lambda - (4i+1)]\,\varkappa\, a_i - (2i-1)\,\bar{a}_{i-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann ist

$$\varphi'(\zeta) = \Sigma\, 2\nu\, a_\nu\, \zeta^{2\nu-1} = 2\lambda\varkappa\zeta\,\varphi(\zeta) - 2\varkappa\zeta^2\varphi'(\zeta) - \varkappa\zeta\,\varphi(\zeta) - \zeta^4\varphi'(\zeta) - \zeta^3\varphi(\zeta).$$

Also hat man

$$\varphi'(\zeta) = \frac{2\lambda\varkappa\zeta - \varkappa\zeta - \zeta^3}{1 + 2\varkappa\zeta^2 + \zeta^4}\cdot\varphi(\zeta)$$

und

$$\varphi(\zeta) = a_0\,\frac{1}{\sqrt[4]{1 + 2\varkappa\zeta^2 + \zeta^4}}\, e^{\int \frac{2\lambda\varkappa\zeta}{1+2\varkappa\zeta^2+\zeta^4}\cdot d\zeta}.$$

Sei nun

$$\alpha = -\frac{c+b}{c-b};\quad \beta = -\frac{c-b}{c+b},$$

so folgt

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_0}{\sqrt[4]{1 + 2\varkappa\zeta^2 + \zeta^4}}\left[\frac{\zeta^2 - \alpha}{\zeta^2 - \beta}\right]^{\frac{\lambda\varkappa}{\alpha-\beta}}.$$

Eine Modifikation tritt ein, wenn $\alpha = \beta = -1$ ist. Dann hat man

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_0}{\sqrt{1+\zeta^2}}\, e^{\frac{-\lambda}{1+\zeta^2}}.$$

Der Gültigkeitsbereich ergibt sich wieder wie früher, ebenso die anderen Untersuchungen, z. B. bezüglich des zweiten Teiles.

Es ergeben sich so die Formeln

$$26)\qquad E_s^m(z) = \frac{\zeta^{-n}\sqrt{(c^2-b^2)^n}\,a_0}{2^n\sqrt[4]{\zeta^4 + 2\varkappa\zeta^2 + 1}}\left(\frac{\zeta^2-\alpha}{\zeta^2-\beta}\right)^{\frac{\lambda\varkappa}{\alpha-\beta}}\binom{\beta}{\alpha}^{\frac{\lambda\varkappa}{\alpha-\beta}}$$

und

$$27)\quad F_s^n(z) = \frac{2^{n+1}\,\zeta^{n+1}}{\alpha_0\sqrt{(c^2-b^2)^{n+1}}\,\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}}\left(\frac{\zeta^2-\alpha}{\zeta^2-\beta}\right)^{-\frac{\lambda\varkappa}{\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\lambda\varkappa}{\alpha-\beta}}.$$

Diese Formeln sind unter sehr beschränkenden Voraussetzungen abgeleitet und es erscheint zum mindesten sehr fraglich, ob man sich von denselben befreien oder sie auch nur wesentlich vereinfachen kann; es ist also von Wichtigkeit, wenn in einem der nächsten Paragraphen statt Näherungswerten obere Grenzen angegeben werden, die von $E_s^n(z)$ und $F_s^n(z)$ nicht überschritten werden, auch wenn v_s^n von derselben Ordnung wie n^2 unendlich wird.

§ 6.

Entwicklung von $(z_1 - z)^{-1}$; $(\sqrt{z_1^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - b^2})^{-1}$; $(\sqrt{z_1^2 - c^2} - \sqrt{z^2 - c^2})^{-1}$ nach Laméschen Funktionen.

Wir gehen darnach aus, diese Funktionen nach Laméschen Funktionen zu entwickeln; wie es Herr Professor Lindemann[1]) für $(z_1 - z)^{-1}$ schon durchgeführt hat.

Es seien ϱ, μ, ν und ϱ_1, μ_1, ν_1 die elliptischen Koordinaten zweier beliebiger Punkte, R ihre Entfernung voneinander, dann hat man

$$28)\quad R^2 = \varrho^2+\mu^2+\nu^2+\varrho_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2 - \frac{2\,\varrho\,\varrho_1\,\mu\,\mu_1\,\nu\,\nu_1}{b^2\,c^2} - 2b^2 - 2c^2$$

$$- 2\,\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\,\sqrt{\varrho_1^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu_1^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\nu_1^2}}{b^2\,(c^2-b^2)}$$

$$- 2\,\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\,\sqrt{\varrho_1^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\mu_1^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\nu_1^2}}{c^2\,(c^2-b^2)}.$$

Dabei ist $\varrho > c$, $c > \mu_1 > b$, $b \geq \nu > 0$ analog für ϱ_1, μ_1, ν_1.

---

[1]) l. c. S. 351.

Ist ausserdem $\varrho_1 > \varrho$, so hat man[1])

$$29) \qquad \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n,$$

wenn

$$30) \quad Y^n = \frac{\pi}{2\,(2n+1)} \sum_{s=1}^{2n+1} E_s^n(\mu) E_s^n(\mu_1) E_s^n(\nu) E_s^n(\nu_1) E_s^n(\varrho) F_s^n(\varrho_1)$$

dabei sind die noch willkürlich gelassenen a_0 so zu bestimmen, dass 30a)

$$\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = \int_b^c (\mu^2-\nu^2)\,[E_s^n(\mu) E_s^n(\nu)]^2 \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = 1$$

ist.[2]) Um auch im Falle komplexer Parameter die Entwicklung zu erhalten, wenn zwei Wurzeln ν_s^n zusammenfallen, hat man folgendermassen zu verfahren. Nach den Entwicklungen von § 3 steht fest, dass auch in diesem Falle die Entwicklung immer möglich ist, so dass man nur mehr die Koeffizienten zu ermitteln hat. Man verfährt dabei genau so wie im allgemeinen Falle.[3]) Die Koeffizienten von

$$E_1(\mu_1)\,E_1(\nu_1);\ \ \frac{d}{d\nu}(E_1(\mu_1)\,E_1(\nu_1));\ \ E_s^n(\mu_1)\,E_s^n(\nu_1)$$

seien Ψ_1; Ψ_2; Ψ_s^n.

Wir setzen dann die Entwicklung von $\frac{1}{R}$ in die partielle Differentialgleichung ein

$$31) \quad (\varrho_1^2-\nu_1^2)\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial \varepsilon_1^2} + (\varrho_1^2-\mu_1^2)\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial \zeta_1^2} + (\mu_1^2-\nu_1^2)\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial \xi_1^2} = 0,$$

dabei sei vorübergehend bezeichnet

---

[1]) Heine, II. Teil, S. 172.

[2]) Es ist also für K und M $a_0^4 > 0$; für L ist $a_0^4 < 0$.

[3]) Heine, II. Teil, S. 165 und 172.

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\mu_1} \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}};\quad \zeta_1 = \int_0^{\nu_1} \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}};$$

$$\xi_1 = \int_c^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}}.$$

Man hat also

$$(\varrho_1^2-\nu_1^2)\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\varepsilon_1^2}+\sum_{s,n}[n(n+1)\mu_1^2-(b^2+c^2)v_s^n]\frac{1}{R}-(b^2+c^2)E_1(\mu_1)E_1(\nu_1)\Psi_2\right\}$$

$$+(\varrho_1^2-\mu_1^2)\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\zeta_1^2}-\sum_{s,n}[n(n+1)\nu_1^2-(b^2+c^2)v_s^n]\frac{1}{R}+(b^2+c^2)E_1(\mu_1)E_1(\nu_1)\Psi_2\right\}$$

$$+(\mu_1^2-\nu_1^2)\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\xi_1^2}-\sum_{s,n}[n(n+1)\varrho_1^2-(b^2+c^2)v_s^n]\frac{1}{R}+(b^2+c^2)E_1(\mu_1)E_1(\nu_1)\Psi_2\right\}$$

$$= 0.$$

Wir setzen also hierin die Entwicklung von $\frac{1}{R}$ ein, die ersten beiden Klammerausdrücke werden Null; der letzte führt dagegen zu den für die Ψ_s^n schon bekannten Resultaten.

Ausserdem hat man aber noch

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}(\Psi_1(E_1(\mu_1)E_1(\nu_1))-[n(n+1)\varrho_1^2-(b^2+c^2)v_1]\Psi_1E_1(\mu_1)E_1(\nu_1)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\left\{\Psi_2\frac{d}{dv_1}(E_1(\mu_1)E_1(\nu_1))\right\}-[n(n+1)\varrho_1^2-(b^2+c^2)v_1]\Psi_2\frac{d}{dv_1}(E_1(\mu_1)E_1(\nu_1))$$

$$+(b^2+c^2)\Psi_2E_1(\mu_1)E_1(\nu_1)=0$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}(\Psi_2)-[n(n+1)\varrho_1^2-(b^2+c^2)v_1]\Psi_2=0$$

und

$$\frac{\partial^2(\Psi_1)}{\partial\xi_1^2}-[n(n+1)\varrho_1^2-(b^2+c^2)v_1]\Psi_1+(b^2+c^2)\Psi_2=0.$$

Es ist also

$$\Psi_2=\beta_1F_1(\varrho_1)=\beta_1(E_1(\mu)E_1(\nu)E_1(\varrho)F_1(\varrho_1)),$$

wie man leicht in bekannter Weise sieht, wenn man für ϱ dieselben Schlüsse macht wie für ϱ_1, im übrigen aber symmetrisch ergänzt. Ebenso findet man

$$\Psi_1 = \alpha_1 F_1(\varrho_1) + \frac{d}{d v_1}(\beta_1 F_1(\varrho_1)) = \alpha_1 E_1(\mu) E_1(\nu) E_1(\varrho) F_1(\varrho_1) + \beta_1 \frac{d}{d v}(E_1(\mu) E_1(\nu) E_1(\varrho) F_1(\varrho_1))$$

so dass man als Ersatzglieder erhält[1])

32) $$\alpha_1 E_1(\mu) E_1(\nu) E_1(\mu_1) E_1(\nu_1) E_1(\varrho) F_1(\varrho_1) + \beta_1 \frac{d}{d v}(E_1(\mu) E_1(\nu) E_1(\mu_1) E_1(\nu_1) E_1(\varrho) F_1(\varrho_1)).$$

Setzt man nun

33)
$$\begin{aligned} &\text{I} && \mu = \mu_1 = c, && \nu = \nu_1 = b \\ &\text{II} && \mu = \mu_1 = c, && \nu = \nu_1 = 0 \\ &\text{III} && \mu = \mu_1 = b, && \nu = \nu_1 = 0 \\ &\text{IV} && \mu = \mu_1 = \nu = \nu_1 = b, \end{aligned}$$

so wird

$$\text{I} \quad R = \varrho_1 - \varrho$$

$$\text{II} \quad R = \sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho^2 - b^2}$$

$$\text{III} \quad R = \sqrt{\varrho_1^2 - c^2} - \sqrt{\varrho^2 - c^2}$$

$$\text{IV} \quad R^2 = \varrho_1^2 + \varrho^2 - 2(c^2 - b^2) - 2\varrho\varrho_1 \frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{c^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{\varrho_1^2 - c^2}(c^2 - b^2)$$

$$= (\varrho - \varrho_1)^2 \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2 - b^2}{c^2}(\sqrt{\varrho^2 - c^2} - \sqrt{\varrho_1^2 - c^2})^2.$$

Auf IV soll nicht weiter eingegangen werden, da dasselbe, wie aus späteren Formeln hervorgehen würde, zu nicht so eleganten Resultaten führt wie I, II und III, die offenbar zusammengehören. Man hat dann für

---

[1]) Cohn, l. c. S. 34.

$$\text{I)}\quad Y_{\mathrm{I}}^{n} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{s=2n+1} [K_s^n(c)\, K_s^n(b)]^2\, K_s^n(\varrho)\, F_{s0}^n(\varrho_1)$$

$$\text{II)}\quad Y_{\mathrm{II}}^{2n} = \frac{\pi}{2(4n+1)} \sum_{s=1}^{n+1} [K_s^{2n}(c) K_s^{2n}(0)]^2\, K_s^{2n}(\varrho)\, F_{s0}^{2n}(\varrho_1)$$

$$Y_{\mathrm{II}}^{2n+1} = \frac{\pi}{2(4n+3)} \sum_{s=1}^{n+1} [L_s^{2n+1}(c) L_s^{2n+1}(0)]^2\, L_s^{2n+1}(\varrho)\, F_{s1}^{2n+1}(\varrho_1)$$

$$\text{III)}\quad Y_{\mathrm{III}}^{2n} = \frac{\pi}{2(4n+1)} \sum_{s=1}^{n+1} [K_s^{2n}(b)\, K_s^{2n}(0)]^2\, K_s^{2n}(\varrho)\, F_{s0}^{2n}(\varrho_1)$$

$$Y_{\mathrm{III}}^{2n+1} = \frac{\pi}{2(4n+3)} \sum_{s=1}^{n+1} [M_s^{2n+1}(b) M_s^{2n+1}(0)]^2\, M_s^{2n+1}(\varrho)\, F_{s2}^{2n+1}(\varrho_1).$$

Es ist nämlich $K_s^n(0)$ für ungerades n, $L_s^n(0)$ und $M_s^n(0)$ für gerades n Null. Eine Entwicklung, bei der auch eine vierte Lamésche Funktion auftritt, ergibt sich also durch keine der Spezialisierungen. Es kommt jetzt darauf an, die Koeffizienten der Entwicklung abzuschätzen. Zu diesem Zwecke geht man nach dem Vorgange von Herrn Professor Lindemann aus von der Formel[1])

$$34)\qquad P^n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{s=2n+1} E_s^n(\mu)\, E_s^n(\mu_1)\, E_s^n(\nu)\, E_s^n(\nu_1),$$

wobei

$$\cos\gamma = \frac{\mu\nu \cdot \mu_1\nu_1}{b^2 c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}\,\sqrt{\mu_1^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu_1^2}}{b^2(c^2-b^2)} + \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{c^2-\mu_1^2}\,\sqrt{c^2-\nu_1^2}}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Setzt man für μ, ν, μ_1, ν_1 die speziellen Werte von 33) I, II, III ein, so erhält man in allen drei Fällen $\cos\gamma = 1$, also

$$P^n(1) = 1 = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{2n+1} [E_s^n(\beta)\, E_s^n(\gamma)]^2,$$

wobei also β die Werte hat c, c, b; γ die Werte b, 0, 0.

[1]) l. c. S. 353; ebenso Heine, l. c. S. 432.

In diesen Entwicklungen ist aber alles reell und es ist jedes einzelne Glied positiv;[1]) ferner sind hierin die Konstanten in den E so bestimmt, dass die Integralbedingung erfüllt ist. Wir können also den Schluss ziehen

$$(E_s^n(\beta))^2 (E_s^n(\gamma))^2 < \frac{2(2n+1)}{\pi}.$$

Setzt man also

$$35) \qquad Y_\tau^n = \sum_{s=1}^{2n+1} C_{s\tau}^n E_s^n(\varrho) F_s^n(\varrho_1),$$

so ist

$$|C_{s\tau}^n| < 1, \text{ wenn } \tau = \text{I, II, III.}$$

Wir ersetzen jetzt ϱ und ϱ_1 durch z und z_1. Die entwickelten Reihen konvergieren sicher, wenn z und z_1 reelle Grössen sind und wenn $z_1 > z > c$ also für alle reellen Werte von ζ und ζ_1, für welche $1 > |\zeta| > |\zeta_1|$. Man könnte sich nun fragen, ob die Reihen auch für komplexe Werte unter der Voraussetzung, dass $1 > |\zeta| > |\zeta_1|$ ist, konvergieren. Auf Grund der früher aufgestellten asymptotischen Werte erschien es nun wahrscheinlich, dass die Frage zu bejahen sei.[2])

Es ist deshalb von Wichtigkeit, wenn an einem Beispiele gezeigt wird, dass trotz alledem die angegebene Bedingung für die Konvergenz nicht hinreichend ist.

§ 7.

Konvergenzbetrachtungen und Entwicklungen von Funktionen komplexen Argumentes nach Laméschen Funktionen.

Setzt man $b = 0$, so gehen, wie schon im § 2 bemerkt wurde, die Laméschen Funktionen in die Kugelfunktionen und deren Zugeordneten über. In diesem Falle gelingt es auch, die numerischen Koeffizienten der Entwicklung von $\frac{1}{z_1 - z}$ zu berechnen.

[1]) Diese beiden Behauptungen ergeben sich unmittelbar als Folgerungen aus der bei 30a) Seite 42 gemachten Anmerkung.

[2]) Lindemann, l. c. S. 354.

Man findet[1])

$$36)\quad \frac{1}{z_1 - z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m}{}' (-1)^{n+m} \frac{1\cdot 3 \ldots (n+m-1)\cdot 1\cdot 3 \ldots (n-m-1)}{2\cdot 4 \ldots (n+m)\cdot 2\cdot 4 \ldots (n-m)} \cdot P_m^n(\sqrt{1-z^2})\ Q_m^n(\sqrt{1-z_1^2}),$$

wobei die innere Summe über alle Zahlen m auszudehnen ist, für welche $n - m$ eine positive gerade Zahl ist, für $m = 0$ ist nur die Hälfte des betreffenden Gliedes zu nehmen, was durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückt ist. Es folgt, dass auch $(n + m)$ eine gerade Zahl ist, also ist

$$(-1)^{n+m} = +1.$$

Wir setzen nun

$$\mathfrak{z} = \sqrt{1-z^2} \qquad \mathfrak{z}_1 = \sqrt{1-z_1^2}$$

$$t = \mathfrak{z} - \sqrt{\mathfrak{z}^2-1} \qquad t_1 = \mathfrak{z}_1 - \sqrt{\mathfrak{z}_1^2-1}$$

$$\zeta = z - \sqrt{z^2-1} = +it \qquad \zeta_1 = z_1 - \sqrt{z^2-1} = +it_1.$$

Ferner hat man[2])

$$37\,a)\quad (1-t^2)^\nu Q_\nu^n(\mathfrak{z}) = (2t)^{n+1} F(\tfrac{1}{2} - \nu,\ n+1-\nu,\ n+\tfrac{3}{2}, t^2).$$

$$37\,b)\quad (1-t^2)^\nu P_\nu^n(\mathfrak{z}) = (2t)^{-n} F(\tfrac{1}{2} - \nu,\ -n-\nu,\ -n+\tfrac{1}{2}, t^2)$$

und in anderer Form[3])

$$37\,c)\quad (1-t^2)^\nu Q_\nu^n(\mathfrak{z}) = (2t)^{n+1}(1+t^2)^{\nu-n-1} F\left(\frac{n+1-\nu}{2}, \frac{n+2-\nu}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{\mathfrak{z}^2}\right).$$

Die ersten beiden Reihen gelten, wenn $|t| < 1$, die letzte, wenn $|\mathfrak{z}| > 1$, also für alle Werte t, welche innerhalb der $\mathfrak{z} = 1$ entsprechenden Kurve liegen.

Es folgt also

$$38\,a)\qquad P_n^n(\mathfrak{z}) = (1-t^2)^n (2t)^{-n} = (1+\zeta^2)^n (2\zeta)^{-n} i^n.$$

Ferner nach den Untersuchungen des § 5

$$38\,b)\quad \lim_{n=\infty} Q_n^n(\mathfrak{z}) = \frac{(1-t^2)^{-n}}{1+t^2}(2t)^{n+1} = (1+\zeta^2)^{-n}(2\zeta)^{n+1} \frac{1}{1-\zeta^2} \cdot i^{-(n+1)}.$$

---

[1]) Lindemann, l. c. S. 379. [2]) Heine, S. 232. [3]) Heine, S. 217.

Uberdies folgt dieses auch unmittelbar aus 37 c) für den Bereich, in dem diese Formel gilt, aber man sieht auch aus ihr sofort, dass die Annäherung bis zur $(1-\delta)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, wobei δ beliebig klein ist. Wir zeigen nun, dass es Wertepaare ζ und ζ_1 gibt, für welche $|\zeta_1| < |\zeta|$ ist und für die $P_n^n(\mathfrak{z})\, Q_n^n(\mathfrak{z}_1)$ mit n unendlich gross wird. Zu diesem Zwecke sei ζ reell, ζ_1 dagegen rein imaginär, wir setzen vorübergehend

$$\zeta_1 = i\,\bar{\zeta}_1$$

wobei dann $\bar{\zeta}_1$ rein reell ist. Dann hat man

$$39) \qquad P_n^n(\mathfrak{z})\, Q_n^n(\mathfrak{z}_1) = 2\, C_n\, (1+\zeta^2)^n\, (1-\bar{\zeta}_1^2)^{-n}\, \zeta^{-n}\, \bar{\zeta}_1^{n+1} \frac{1}{1+\bar{\zeta}_1^2}.$$

Dabei ist $C_n = \pm i$.

Es gibt also in der Tat zu jedem reellen ζ, für welches $|\zeta| < 1$, unendlich viele ζ_1, die z. B. rein imaginär sind und für die zwar $|\zeta_1| < |\zeta|$ ist; für die aber $P_n^n(\mathfrak{z})\, Q_n^n(\mathfrak{z}_1)$ mit wachsendem n unendlich wird, wie $(1+\varepsilon)^n$, wenn ε eine positive Zahl ist, denn es muss dazu nur

$$\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta_1^2} > \frac{\zeta}{\zeta_1}$$ sein, dabei ist aber $\frac{1}{1-\zeta_1^2} > 1$, ebenso $1+\zeta_1^2 > 1$.

Sei n gerade, dann tritt in der Entwicklung von $\frac{1}{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}}$ ein Glied $P_n^n(\mathfrak{z})\, Q_n^n(\mathfrak{z}_1)$ auf; der hinzutretende Faktor kann nicht verhindern, dass dieses Glied beliebig gross wird, wenn n nur gross genug ist, denn es ist[1])

$$2\,\frac{2\cdot 4 \ldots\ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots\ldots (2n+1)} = \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

für sehr grosse Werte von n in jeder beliebigen Annäherung, also

$$40) \qquad \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n} = \frac{2}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass für $m = n$ der Koeffizient von $P_m^n\, Q_m^n$ wirklich durch die linke Seite von 40) dargestellt wird.

[1]) Heine, S. 172.

Es gilt nun der Satz: Wenn ζ reell oder rein imaginär ist, wenn gleichzeitig ζ_1 reell oder rein imaginär ist, so sind alle Glieder, welche in der Entwicklung von $\frac{1}{z_1 - z}$ zu einem festen n gehören, gleichzeitig reell oder rein imaginär und sie haben dasselbe Vorzeichen. Nimmt also eines der zu n gehörigen Glieder mit wachsendem n beliebig grosse Werte an, so geschieht dieses a fortiori mit der Summe aller zu einem n gehöriger Glieder. Wir werden den Satz, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, erst nachher beweisen.

Nun gibt es für jedes n, wie im § 2 gezeigt wurde, v_s^n, die kleiner sind als $\frac{n}{2}$; in dem speziellen Falle gibt es Wurzeln, $(n - 2\sigma)^2$, $(n - 2\sigma + 2)^2$, kurz, es gibt Wurzeln, die nicht von höherer Ordnung mit n unendlich werden, wie n selbst, ja sogar Wurzeln, die endlich bleiben, wie gross auch n sein mag. Für diese Glieder gelten aber die asymptotischen Werte, wenigstens in einem bestimmten Bereiche und diese Glieder werden mit n beliebig gross, sobald $|\zeta_1| > |\zeta|$.

Es gibt also für jedes n ein Glied zum mindesten, welches mit n beliebig gross wird, wenn nicht $|\zeta_1| \leq |\zeta|$ ist.

Aber wir haben gesehen, dass es auch unter der Voraussetzung dieser Bedingung Glieder gibt, die mit n unendlich gross werden. Wir nehmen nun an, es gebe einen Bereich, so dass die zu jedem beliebigen n gehörige Summe unter einer festen Grenze liegt, wenn ζ_1 irgendwo im Inneren des Gebietes liegt, ζ aber ausserhalb desselben. Schneidet nun die Randkurve die Achse des Reellen in einem Abstande ϱ von dem Koordinatenanfangspunkte 0, dann muss die Kurve die imaginäre Achse in einem Abstande ϱ_1 schneiden, wobei

$$\varrho_1 < \frac{\varrho}{1 + \varrho^2}(1 - \varrho_1^2) < \varrho.$$

Im anderen Falle würde es ja unendlich viele Punkte $\bar{\zeta}_1$ auf der imaginären Achse geben, die innerhalb der Kurve liegen und für die $P_n^n(\zeta)\, Q_n^n(\bar{\zeta}_1)$ beliebig gross wird bei geeignet

gewähltem n für unendlich viele ζ, die reell sind und ausserhalb der Kurve liegen.

Ist aber $\varrho_1 < \varrho$, dann gibt es auf der Achse des Imaginären Punkte ζ, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als reelle ζ_1 im Inneren der Kurve. Dann aber werden die zu endlichen v_s^n gehörigen Glieder mit wachsendem n beliebig gross für beliebig viele ζ im Äusseren, ζ_1 im Inneren der Kurve. Alles dieses widerspricht der Definition unserer Kurve. Es wäre jedoch der Fall denkbar, dass die Kurve die Achse des Reellen überhaupt nicht schneidet. Dann muss aber jedenfalls 0 im Inneren liegen, da es sonst ein ζ geben würde, für das $\zeta = 0$ ist, was nach Obigem unmöglich; aber es könnte noch das Gebiet zum Teil von dem Einheitskreise begrenzt sein, dann hat man wie oben zu schliessen.

Es gibt also im allgemeinen in der ζ Ebene und damit auch in der z Ebene keine Kurve, welche die Eigenschaft hat, dass die Entwicklung von $\frac{1}{z_1 - z}$ nach Zugeordneten der Kugelfunktionen für alle ζ_1 im Inneren (für alle z_1 im Äusseren) der Kurve konvergiert, wenn ζ im Äusseren (z im Inneren) derselben liegt.

Denn nach Obigem lassen sich, wie gross auch n sei, Zahlen n_1 angeben, die grösser sind als n und für die die Summe der zugehörigen Glieder jeden beliebig gross vorgegebenen Wert übersteigt, wenn ζ_1 im Inneren, ζ im Äusseren der als existierend angenommenen Kurve geeignet gewählt werden, d. h. die Reihe für die $\frac{1}{z_1 - z}$ würde in diesem Falle divergieren.

Es bleibt noch der vorher erwähnte Hilfssatz zu beweisen.

Zunächst schicken wir dazu voraus, dass aus § 1 folgt, dass zu reellen t, für welches $|t < 1$, reelle Werte von ζ gehören, für die $\zeta > 1$. Ist t rein imaginär und $t| < 1$, so ist auch ζ rein imaginär und umgekehrt. Dann ist $P_\nu^n(\zeta)$ mit $P_n^n(\zeta)$ für reelle ζ und $\zeta| > 1$ und für rein imaginäre ζ gleichzeitig reell oder rein imaginär und beide haben dasselbe Vorzeichen; dieses gilt für alle t, für welche t^2 reell ist und $t < 1$.

Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus 37b), ebenso folgt daraus, dass für $t = 0$:

$$(2t)^n P_\nu^n(\zeta) = +1$$

ist. Ferner liegen die Nullstellen von $E_s^n(z) = 0$ bekanntlich auf der Achse der reellen z, zwischen $\pm c$; im Grenzfalle der Kugelfunktionen können Nullstellen auch mit $\pm c$ zusammenfallen. Wir haben $c = 1$ und man sieht, dass die Kugelfunktionen $P_\nu^n(\zeta)$ nicht verschwinden können, wenn t die Werte 0 bis 1 und $0 \ldots i$ durchläuft, wobei die Grenzen des Intervalles noch ausgeschlossen werden; also ist in diesem Intervalle auch ein Zeichenwechsel ausgeschlossen. Damit ist aber der Satz in seinem ganzen Umfange für die P_ν^n bewiesen, wobei natürlich $\nu \leq n$ vorausgesetzt ist.

Genau derselbe Satz gilt auch für die $Q_m^n(\zeta)$; der erste Teil wird wieder bewiesen, indem man von 37a) ausgeht.

Ferner ist

$$Q_m^n(\sqrt{1-z^2}) = (2n+1) P_m^n(\sqrt{1-z^2}) \int_z^\infty \frac{dz}{(P_m^n(\sqrt{1-z^2}))^2 z\sqrt{z^2-1}}.$$

Wir denken uns das Integral nun entweder längs der Achse des Reellen, wenn z reell und > 1, oder längs der Achse des Imaginären,[1]) wenn z rein imaginär ist, genommen. Für die in Betracht kommenden z hat nach Obigem $P_m^n(\sqrt{1-z^2})$ denselben Charakter und dasselbe Vorzeichen wie $P_n^n(\sqrt{1-z^2})$, wir haben also nur das Verhalten des Integrals zu studieren. Zu diesem Zwecke differentiieren wir das Integral nach z und es folgt, dass das Integral, allenfalls durch i dividiert, für die

[1]) Das so entstehende Integral ist, wie man sich sofort überzeugt, eben dasjenige, welches für rein imaginäre z in $Q_m^n(\sqrt{1-z^2})$ auftritt. Man kann überdies auch direkt von der Form

$$\frac{d}{dz} \cdot \frac{Q_m^n \sqrt{1-z}}{P_m^n \sqrt{1-z^2}} = c \cdot \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$$

(Heine, l. c. S. 385) ausgehen.

in Betracht kommenden z immer zu- oder abnimmt, und zwar ist das Verhalten für alle m dasselbe; dabei entsprechen den Werten $z = 1$ bis ∞ die Werte $\zeta = 0$ bis ∞i; den Werten $z = 0$ bis ∞i, $\zeta = 1$ bis ∞. Daraus folgt also, dass

$$P_m^n(\sqrt{1-z^2}) \cdot Q_m^n(\sqrt{1-z_1^2})$$

für bestimmte reelle und rein imaginäre z und z_1 für alle Werte von $m \leqq n$ gleichzeitig reell oder rein imaginär ist und dass die Produkte, die zu einem n gehören, immer gleiches Vorzeichen haben; $(-1)^{n+m}$ ist, wie vorher bemerkt, immer positiv, ebenso der hinzutretende Zahlenfaktor, in dem $n-m-1$ und $n-m$ für $m = n$ durch 1 zu ersetzen sind. Damit ist aber der Hilfssatz in aller Strenge bewiesen.

Der allgemeine Satz, den wir für Kugelfunktionen bewiesen haben, lässt sich erweitern. Es ist im allgemeinen unmöglich, eine Kurve in der ζ Ebene anzugeben, so dass die Entwicklung von $\frac{1}{z_1 - z}$ nach Laméschen Funktionen immer konvergiert, wenn ζ_1 im Inneren, ζ im Äusseren der Kurve liegt.

Eine Konvergenz könnte nämlich nur dadurch zustande kommen, dass gewisse mit n sehr gross werdende Glieder sich aufheben. Da dieses jedoch in dem speziellen Falle der Kugelfunktionen nicht geschieht, so kann dieses auch im allgemeinen Falle nicht geschehen, zumal da die Kugelfunktionen sich ganz regelmässig einordnen, wie wir im § 2 gesehen haben.

Wir suchen nun aber nach Bedingungen, welche in jedem Falle hinreichend sind. Da, wie wir gesehen haben, das Problem sich ungemein kompliziert, wenn die v_s^n, die Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, einen wesentlichen Einfluss bekommen, so erscheint es als schwierig, Bedingungen zu finden, die gleichzeitig hinreichend und notwendig sind. Wir müssen uns daher begnügen, Bedingungen abzuleiten, die nur hinreichend sind. Wir gehen dazu aus von den Formeln 11).

Sei dann

$$(m+1)(2n-2m-1)\bar{\alpha}_{m+1}$$
$$=[-(4m+1)n+4m^2+2n^2+2mn+2m-2m^2-n-1+m]\alpha_m\varkappa.$$

Es ist also sicher

$$|\alpha_\nu| < |\bar{\alpha}_\nu|.$$

Wir denken uns wieder, nur des kürzeren Ausdruckes wegen, n sei gerade und $E_s^n = K_s^n$, bei allen anderen Fällen treten nur ganz unbedeutende Modifikationen auf, die das Endresultat nicht beeinträchtigen.

Es werde dann $\bar{\alpha}_{\sigma+1}$ direkt gleich Null gesetzt, während für $\bar{\alpha}_m$ die aus den Rekursionsformeln berechneten Werte zu setzen sind, wenn $m \leqq \sigma$; ferner sei $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$. Dasselbe gelte, wenn wir definieren

$$(m+1)(2n-2m-1)\gamma_{m+1} = (2n^2+2m^2-2mn)\varkappa\gamma_m$$

und

$$\delta_{m+1} = \frac{n^2-m^2}{(m+1)(n-m)}\varkappa\delta_m = \frac{n+m}{m+1}\varkappa\delta_m.$$

Dann ist für alle $m \leqq \frac{n}{2}$:

$$|\alpha_m| \leqq |\bar{\alpha}_m| \leqq \gamma_m| \leqq \delta_m|;\ \alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = \bar{\gamma}_0 = \delta_0;\ \alpha_{\sigma+1} = \bar{\alpha}_{\sigma+1} = \gamma_{\sigma+1} = \delta_{\sigma+1} = 0.$$

Wir setzen $\varkappa$ als reell voraus und $\varkappa > 1$; dann nehmen die δ_m bis δ_σ mit wachsendem m immer zu; $|\delta_\sigma$ ist also am grössten. Für sehr grosse Werte von n hat man in genügender Annäherung[1])

$$\delta_\sigma = \frac{\alpha_0(\frac{3}{2}n)!\,\varkappa^{\frac{n}{2}}}{n!\,(\frac{n}{2})!\,(\frac{n}{2}+1)} \sim \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{3}{2}n}(\frac{3}{2}n)^{\frac{3n+1}{2}}\varkappa^{\frac{n}{2}}}{e^{-n}n^{\frac{2n+1}{2}}e^{-\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{n+2}{2}}.$$

Also sicher

$$\delta_\sigma < \alpha_0\varkappa^{\frac{n}{2}}\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

[1]) Serret Par. C. R. 50, 1860, p. 662.

Nun ist

$$2\,|K_s^n(z)| < \alpha_0\,[\,|\zeta^n| + |\zeta^{-n}|\,] + \delta_1\,[\,\zeta^{n-2} + |\zeta^{-n+2}|\,] + \ldots + |\delta_{\sigma-1}|\,[\,|\zeta|^2 + |\zeta|^{-2}] + |\delta_\sigma|$$

$$< |\delta_\sigma| \frac{1}{1-|\zeta|^2} + |\delta_\sigma| \sum_{\nu=0}^{\sigma} \left(\frac{1}{3\varkappa}\right)^{\nu} |\zeta|^{-2\nu}.$$

Also, wenn $|\zeta\sqrt{3\varkappa}| > 1$ ist,

41a) $$2\,|K_s^n(z)| < |\delta_\sigma| \left\{ \frac{1}{1-|\zeta|^{-2}} + \frac{1}{1-(\sqrt{3\varkappa}\,\zeta)^{-2}} \right\}$$

$$< C\,|\delta_\sigma| < C\,\varkappa^{\frac{n}{2}} \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{n}{2}} |\alpha_0|,$$

und wenn $|\zeta\sqrt{3\varkappa}| < 1$

41b) $$2\,|K_s^n(z)| < C'\,|\alpha_0|\,(\tfrac{9}{4})^{\frac{n}{2}}\,|\zeta|^{-n}.$$

Dabei sind C und C' Grössen, die auf das Unendlichwerden keinen wesentlichen Einfluss ausüben.

Wir kommen nun zu der Untersuchung von $F_s^m(z_1)$. Es wird sich zeigen, dass für die vorkommenden ζ_1: $|\zeta_1|^2 < \dfrac{1}{10\,\varkappa}$ im wesentlichen ist.

Wir dürfen also, wenn $r_s^n < \dfrac{n+1}{2}$ ist, die asymptotischen Werte für F_s^m benützen, ist aber $r_s^n > \dfrac{n+1}{2}$, so gilt folgender Satz. In 20a) ist $\beta_{j+1} > \beta_j$ und β_{j+1} und β_j haben entgegengesetzte Vorzeichen; welcher Satz sich durch vollständige Induktion unschwer beweisen lässt. Ferner ist

$$\beta_0 = \frac{4}{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Alles dieses benützend, setzen wir

$$(j+1)\,\beta_{j+1}(2n+2j+3) = \varkappa\,[(4j+1)n + (2j+1)^2 + 2n^2]\,\beta_j$$

$$\beta_{j+1} = 2\,\frac{(\sigma+j)}{j}\,\beta_j\,\varkappa.$$

Dann ist

$$|\beta_j| \geq |\beta_j| > |\beta_j| \; ; \; \beta_0 = \beta_0 = \beta_0.$$

Ferner

$$42) \qquad F_s^n(z_1) < \zeta_1^{n+1} \Big| \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \Big| \zeta_1^{2i} < C'' |\zeta_1|^{n+1} \left(\tfrac{5}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\alpha_0},$$

wobei C'' auf das Unendlichwerden keinen Einfluss hat. Um dieses zu zeigen, bestimmt man das zu $j = \frac{n}{8}$ gehörende Glied nach derselben Methode wie oben für den grössten Wert von ζ_1 und findet dann leicht die obige Ungleichung, wobei C'' z. B. linear in n ist.

Ist also I.

$$\zeta \sqrt{3\varkappa} | > 1,$$

so ist

$$|E_s^n(z) F_s^n(z_1)| \leqq C C'' \varkappa^{\frac{n}{2}} \left(\frac{135}{16}\right)^{\frac{n}{2}} \zeta_1^{n+1}$$

ein Ausdruck, der beliebig klein wird, wenn[1])

$$42a) \qquad |\zeta_1| \leqq \sqrt{\frac{1}{10\varkappa}}.$$

Ist II.

$$\zeta \sqrt{3\varkappa} < 1,$$

so ist

$$E_s^n(z) F_s^n(z_1)| \leq C C'' \cdot \left(\frac{45}{16}\right)^{\frac{n}{2}} \zeta^{-n} \zeta_1^{n+1}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein, wenn

$$42b) \qquad |\zeta_1| \leq \sqrt{\frac{3}{10}} |\zeta|.$$

---

[1]) Es tritt hier bei der Zahlenbestimmung eine Willkür auf, insofern als nicht die kleinstmöglichen Werte genommen sind, doch ist dieses belangslos.

Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so konvergieren auch die im vorigen Paragraph aufgestellten Entwicklungen gleichmässig. Natürlich können die eben bestimmten Zahlengrössen noch etwas verkleinert werden, doch hat dieses keine theoretische Bedeutung. Ferner folgt aus den Untersuchungen des § 2, dass auch bei komplexen Parametern das Verfahren wenig abzuändern ist.

Auf Grund dieser Untersuchungen beginnen wir nach dem Vorgange von Herrn Professor Lindemann allgemeinere Funktionen nach Laméschen Funktionen zu entwickeln.

Es ist nämlich

$$43) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z_1)\,dz_1}{z_1 - z},$$

wobei das Integral in bekannter Weise über die Begrenzung eines Flächenstückes zu nehmen ist, innerhalb dessen $f(z)$ als holomorphe Funktion gegeben ist. Unter den oben angegebenen Bedingungen darf dann die Reihe, die durch Entwicklung von $\frac{1}{z_1 - z}$ nach Laméschen Funktionen entsteht, gliedweise integriert werden. Dabei ist statt ϱ und ϱ_1 in den früheren Entwicklungen z und z_1 eingeführt, dagegen soll ϱ die Bedeutung erhalten, die es in § 1 hatte.

Es sei dann

1) $f(z)$ im Inneren einer Kurve 6 in der z Ebene gegeben, welche dem Kreise vom Radius $\varrho_1 = \sqrt{\frac{1}{10\,\varkappa}}$ in der ζ Ebene entspricht. Es gilt dann für alle Punkte z im Inneren des zu $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3\,\varkappa}}$ gehörigen Kurve sicher die Entwicklung

$$44) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} C_{s\,\mathrm{I}}^{n}\, A_s^n(z)\, K_s^n(z),$$

wobei $C_{s\,\mathrm{I}}^{n}$ durch 35) definiert ist und

$$44\,\mathrm{a}) \qquad A_s^n = \frac{1}{2\pi i}\int f(z_1)\, F_s^n(z_1)\, d\,z_1;$$

dabei ist das Integral über die erste Kurve im positiven Sinne zu erstrecken. Dieses ist auch gleich dem im selben Sinne über die zweite Kurve genommenen Integrale.

2. Eine analoge Entwicklung erhält man, wenn $f(z)$ im Inneren einer Kurve 6 gegeben ist, für welche $\varrho_1 < \sqrt{\frac{1}{10\varkappa}}$; also $\varrho_1 = \sqrt{\frac{3}{10}}\varrho$, wobei $\varrho < \frac{1}{\sqrt{3\varkappa}}$. Dann gilt die Entwicklung im Inneren der Kurve 6, welche ϱ entspricht.

3. $f(z)$ ist gegeben für alle Punkte ausserhalb einer Kurve 6, die aus einem Zuge besteht. Man hat dann die Entwicklung

$$45) \qquad \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma+1} C_{s1}^{n} B_s^n F_s^n(z),$$

wobei

$$45a) \qquad B_s^n = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z_1)}{z_1} K_s^n(z_1)\, dz_1$$

und diese Entwicklung gilt im Äusseren der zu $\varrho = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \varrho_1$ gehörigen Kurve 6, wenn die erste Kurve, über die[1]) das Integral so zu nehmen ist, dass das zu betrachtende Gebiet links liegt, zu ϱ_1 gehört.

4. $f(z)$ ist gegeben für alle Punkte ausserhalb eines Ovales, das durch ein zweites Oval zu einer Kurve 6 ergänzt wird. Es gilt dann eine analoge Entwicklung wie in 3. Die Darstellung gilt für alle Punkte ausserhalb der Kurve 6, welche zu $\varrho = \frac{1}{\sqrt{10\varkappa}}$ gehört. Ähnlich ist zu verfahren, wenn die Randkurve von beiden Ovalen gebildet ist.

---

[1]) Es kann eine im Inneren des Gebietes gelegene andere Kurve, die aus ihr durch stetige Deformation erhalten wird, z. B. die Grenzkurve des Konvergenzgebietes dabei an ihre Stelle treten.

5. $f(z)$ sei in einem Gebiete gegeben, das ringförmig von zwei einteiligen Kurven 6 (in genügend grossem Abstande) begrenzt ist, oder von einer einteiligen Kurve 6 und einem oder beiden Ovalen einer zweiteiligen Kurve begrenzt ist. Dann gilt innerhalb eines Ringgebietes, das von zwei einteiligen Kurven 6 begrenzt wird, die Entwicklung

$$46) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\sigma+1} C_{s\,\mathrm{I}}^{n} \left[A_s^n K_s^n(z) + B_s^n F_{s0}^n(z) \right]$$

wobei 46a)

$$A_s^n = \frac{1}{2\pi i} \int f(z_1) F_{s0}^n(z_1)\, dz_1; \quad B_s^n = \frac{1}{2\pi i} \int f(z_1) K_s^n(z_1)\, dz_1,$$

das erste Integral ist über den äusseren, das zweite über den inneren Rand in bekanntem Sinne zu nehmen; der innere Rand kann auch aus zwei Stücken bestehen. Der Gültigkeitsbereich ergibt sich wie früher.

Es sollen jetzt Funktionen betrachtet werden, die auf der zu $\sqrt{z^2-b^2}$ gehörigen Riemannschen Fläche eindeutig sind. Wir gehen dazu aus von der Formel

$$47) \qquad \int \frac{f(z_1)(z+z_1)\, dz_1}{\sqrt{z_1^2-b^2}\,\sqrt{z^2-b^2}} = \int f(z_1) \frac{(\sqrt{z_1^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2})\, dz_1}{z_1 - z}.$$

Unter dem Integralzeichen steht ein Ausdruck, der nur in einem Blatte für $z = z_1$ unendlich wird. Sei nun $f(z_1)$ auf der Riemannschen Fläche eindeutig, endlich und stetig innerhalb eines Flächenstückes, das im oberen und unteren Blatte von Kurven 6 begrenzt ist, für welche $\varrho = \frac{1}{\sqrt{10\,\varkappa}}$ ist. Wir nehmen dann die Integrale über die Begrenzungslinien. Dann hat man 48)

$$2 f(z) \sqrt{z^2-b^2} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z_1)(z+z_1)\, dz_1}{\sqrt{z_1^2-b^2}\,\sqrt{z^2-b^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n+1} \left(C_{s\,\mathrm{II}}^{2n} A_s^{2n} K_s^{2n} + C_{s\,\mathrm{II}}^{2n+1} A_s^{2n+1} L_s^{2n+1}(z) \right).$$

Dabei ist

48a) $$A_s^{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z_1)\,(z + z_1)\,F_{s0}^{2n}(z_1)\,dz_1;$$

$$A_s^{2n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z_1)\,(z + z_1)\,F_{s1}^{2n+1}(z_1)\,dz_1.$$

Dabei ist noch festzusetzen, wie F_s im zweiten Blatte zu definieren ist. Wir bilden also, wenn z und z_1 reell und grösser als b sind

49) $$\frac{1}{-\sqrt{z_1^2-b^2}-\sqrt{z^2-b^2}} = \frac{-1}{\sqrt{z_1^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n+1} - C_{s\,\mathrm{II}}^{2n} K_s^{2n}(z)\,F_{s0}^{2n}(z_1) + C_{s\,\mathrm{II}}^{2n+1} L_s^{2n+1}(z)\,F_{s1}^{2n+1}(z_1).$$

Wir haben also im zweiten Blatte statt $+F_{s0}^{2n}$ überall $-F_{s0}^{2n}$ zu setzen.

Es ist nun

$$f(z) = P(z) + \sqrt{z^2-b^2}\,Q(z);$$

sind $P(z)$ und $Q(z)$ gerade Funktionen von z, so hat man

50) $$4\sqrt{z^2-b^2}\,f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z_1)\,dz_1}{\sqrt{z_1^2-b^2}-\sqrt{z^2-b^2}};$$

man erhält daraus eine etwas andere Entwicklung.

Analog ist zu verfahren, für den Fall, der zu M gehört. Durch Kombinationen aller dieser Entwicklungen erhält man eine grosse Anzahl neuer Darstellungen; die Diskussion der Bereiche, innerhalb derer diese sicher konvergieren, ergibt sich wie oben. Darauf, wie auch auf die Nullentwicklungen wollen wir aber der Kürze wegen nicht weiter eingehen, bezüglich der letzteren ist auf Lindemann l. c. S. 361 zu verweisen; die Modifikationen ergeben sich leicht aus unseren früheren Ausführungen, besonders was den Bereich der Gültigkeit anbetrifft.

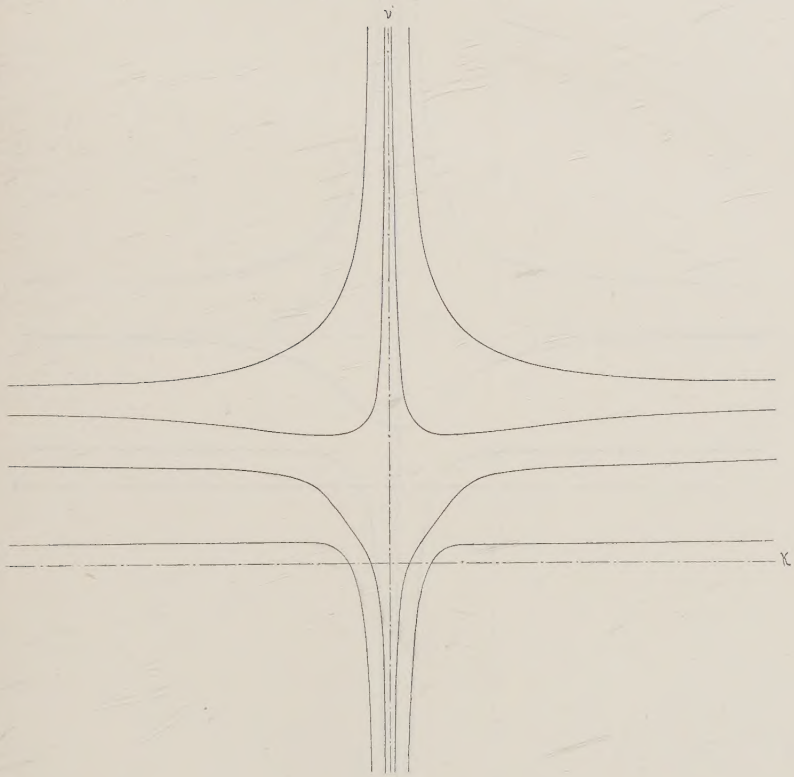
Lebenslauf.

Ich, Emil Hilb, geboren am 26. April 1882 zu Stuttgart, erhielt meine Schulbildung am Eberhard-Ludwig-Gymnasium zu Stuttgart, hierauf am Realgymnasium zu Augsburg. Nachdem ich 1899 das letztere absolviert hatte, besuchte ich von 1899—1900 die Universität und das Polytechnikum München, 1900—1902 die Universität Berlin, von 1902 ab die Universität München. Dabei widmete ich mich vornehmlich dem Studium der Mathemathik und Physik und besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten Anding, Aschkinass, Bauer, Blasius, Burmester, Doehlemann, von Dyck, Ebert, Finsterwalder, Fischer, Frobenius, Fuchs †, Knoblauch, Landau, Lindemann, Muthmann, Paulsen, Plank, Pringsheim, H. A. Schwarz, Schwarzschild, v. Seeliger, Voss, Warburg, v. Weber.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders den Herren Professoren Lindemann, Pringsheim und H. A. Schwarz fühle ich mich zu grossem Danke verpflichtet.

Zu Seite 17.

Fig. 1.



Massstab $x : v = 5 : 2$.